Topologie des espaces vectoriels Normés

Fares Maalouf

Pour une version mise à jour de ce document, visitez mon site

Table des matières

Dans tout ce document, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Distances — Espaces Métriques : Définition et Exemples

Définition 1.1. Soit E un ensemble non vide. On appelle *distance sur* E toute application d de $E \times E$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. (Séparation) Pour tout $(x, y) \in E \times E$; $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$.
2. (Symétrie) Pour tout $(x, y) \in E \times E$; $d(x, y) = d(y, x)$.
3. (Inégalité triangulaire) Pour tout x, y et z dans E ; $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Un ensemble non vide E muni d'une distance est appelé *espace métrique.*

Exemples. Les applications suivantes définissent des distances sur leurs domaines de définition respectifs. La vérification est immédiate, sauf pour l'inégalité triangulaire pour la distance Euclidienne. Celle-là se fait par le moyen de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et sera donnée dans la section suivante.

— La distance Euclidienne (ou usuelle) sur $\mathbb{R}^2$: $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$

— La distance Euclidienne sur $\mathbb{R}^n$: $d((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$

— La distance usuelle sur $\mathbb{R}$: $d(x, y) = |x - y|$

— La distance de Manhattan sur $\mathbb{R}^2$: $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|$

— La distance discrète : $d(x, y) = 0$ si $x = y$, et $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$

Explication en vidéo : Cliquez ici

---

2 Normes, Espaces Vectoriels Normés : définition et exemples

Parmi les exemples donnés précédemment, toutes à l'exception d'une seule sont un type spécial de distances : celles qui proviennent d'une norme. C'est cette notion de "norme" sur un espace vectoriel qu'on va explorer dans cette section.

Définition 2.1. Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. On appelle *norme* sur E toute application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. (séparation) Pour tout $x \in E$, si $N(x) = 0$ alors $x = 0$.
2. (homogénéité) Pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, $N(\lambda.x) = |\lambda|.N(x)$.
3. (inégalité triangulaire) Pour tout $(x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

On dit alors que le couple (E,N) est un *espace vectoriel normé.*

Notation : Les normes sont d'habitude notées par $|.|$ ou $||.||$.

Propriétés. Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé. Alors :

1. $||0|| = 0$
2. Pour tout $(x, y) \in E^2, ||x - y|| \geq ||x|| - ||y||$

Proposition 2.2. *Soit* $(E, ||.||)$ *un espace vectoriel normé. Pour* $x, y \in E$*, on définit* $d(x, y)$ *par :*

$$d(x, y) = ||x - y||.$$

Alors d *est une distance sur* E*.*

Preuve. L'application d ainsi définie est clairement à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. On montre qu'elle vérifie les trois axiomes d'une distance :

1. Séparation : soit $(x, y) \in E^2$. Si $d(x, y) = 0$, alors $||x - y|| = 0$. Or $||.||$ a la séparation, donc $x - y = 0$ et $x = y$.
2. Symétrie : soit $(x, y) \in E^2$. On a les égalités suivantes :
$$d(y, x) = ||y - x|| = ||(-1)(x - y)|| = | - 1|.||x - y|| = d(x, y),$$
l'avant dernière égalité étant donnée par l'homogénéité de $||.||$
3. Inégalité triangulaire : soit $(x, y, z) \in E^3$. Alors
$$d(x, z) = ||x - z|| = ||(x - y) + (y - z)|| \leq ||x - y|| + ||y - z|| = d(x, y) + d(y, z)$$

□

Exemples. Les fonctions définies ci-dessous sont des normes sur $\mathbb{R}^n$:

1. $||x||_1 := \sum |x_i|$
2. $||x||_\infty := max\{x_i, i = 1 \cdots , n\}$

Exemples. Les fonctions définies ci-dessous sont des normes sur $C([0, 1], \mathbb{R})$.

1. $||f||_1 := \int_0^1 |f(t)| \, dt$
2. $||f||_\infty := max\{|f(t)|, \ t \in [0, 1]\}$

Question : Lesquelles parmi les fonctions suivantes sont des normes sur $\mathbb{R}^3$?

1. $f(x, y, z) = |x + y + z|$
2. $f(x, y, z) = \sqrt{x^4 + y^4 + z^4}$
3. $f(x, y, z) = \sqrt{2x^2 + 3y^2 + 4z^2}$
4. $f(x, y, z) = |x| + |y|$

Définition 2.3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Une application $T : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une est dite *produit scalaire sur E* si elle a les propriétés suivantes :

1. T est bilinéaire : pour tous x, y, z dans E et tout λ dans $\mathbb{R}$,
$$T(\lambda x + y, z) = \lambda T(x, z) + T(y, z) \qquad \text{et} \qquad T(x, \lambda y + z) = \lambda T(x, y) + T(x, z)$$
2. T est symétrique : pour tous x, y dans E,
$$T(x, y) = T(y, x)$$
3. T est définie positive : pour tout $x \in E$, $T(x, x) \geq 0$, et si $T(x, x) = 0$ alors $x = 0$.

Théorème 2.4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et T un produit scalaire sur E. Alors*
$$\forall (x, y) \in E^2, |T(x, y)| \leq \sqrt{T(x, x)}\sqrt{T(y, y)}$$

Preuve. Fixons deux éléments x et y de E. Alors d'après les propriétés de T on a pour tout $\lambda \in K$:
$$0 \leq T(\lambda x + y, \lambda x + y) = T(x, x)\lambda^2 + 2T(x, y)\lambda + T(y, y)$$
C'est un polynôme de degré 2 en λ et qui reste positif pour toute valeur de λ, donc sont discriminant est négatif :
$$4(T(x, y))^2 - 4T(x, x)T(y, y) \leq 0,$$
et le résultat en suit. □

Théorème 2.5. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et T un produit scalaire sur E. On définit une application $||.|| : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ par*

$$||x|| = \sqrt{T(x,x)}$$

Alors $||.||$ est une norme sur E.

Preuve. La séparation découle du fait que T est définie positive, et l'homogénéité est donnée par la bilinéarité de T. Pour l'inégalité triangulaire, soient $(x,y) \in E^2$:

$$||x+y||^2 = T(x+y,x+y) = T(x,x) + 2T(x,y) + T(y,y) = ||x||^2 + 2T(x,y) + ||y||^2$$

et on a les implications suivantes :

$$\begin{array}{rcl} |T(x,y)| \leq ||x||.||y|| & \Longrightarrow & T(x,y) \leq ||x||.||y|| \\ & \Longrightarrow & ||x||^2 + 2T(x,y) + ||y||^2 \leq ||x||^2 + 2||x||.||y|| + ||y||^2 \\ & \Longrightarrow & ||x+y||^2 \leq (||x|| + ||y||)^2 \\ & \Longrightarrow & ||x+y|| \leq ||x|| + ||y|| \end{array}$$

La première des assertions étant vraie d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il en est de même pour dernière et l'inégalité triangulaire est établie. □

Corollaire 2.6.

1. *La fonction $||.||_2$ définie sur $C([0,1],\mathbb{R})$ par*

$$||f||_2 := \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 \, dt}$$

   est une norme sur $C([0,1],\mathbb{R})$.

2. *La fonction $||.||_2$ définie sur $\mathbb{R}^n$ par*

$$||(x_1, \cdots, x_n)||_2 := \sqrt{\sum x_i^2}$$

   est une norme sur $\mathbb{R}^n$

Preuve. Ce sont les normes associés respectivement aux produits scalaires

$$T(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t) \, dt$$

et

$$T((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

□

Explication en vidéo : Cliquez ici

---

3 Boules ouvertes, Boules fermées, sphères - définitions et exemples

Définition 3.1. Soit (E,d) un espace métrique, $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}^+$.

1. On appelle *Boule ouverte* de centre a et de rayon r l'ensemble

$$B(a,r) := \{x \in E : d(a,x) < r\}.$$

2. On appelle *Boule fermée* de centre a et de rayon r l'ensemble

$$B'(a,r) := \{x \in E : d(a,x) \leq r\}.$$

3. On appelle *sphère* de centre a et de rayon r l'ensemble

$$S(a,r) := \{x \in E : d(a,x) = r\}.$$

Exercice : Tracer les boules $B(0,1)$ de $\mathbb{R}^2$ muni respectivement des normes $||.||_1$, $||.||_2$ et $||.||_\infty$

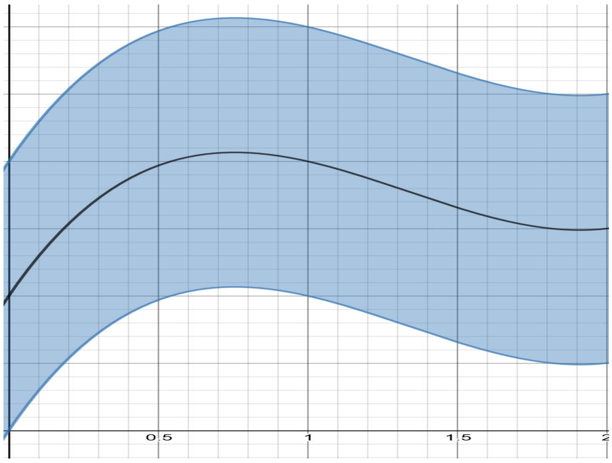
Explication en vidéo : Cliquez ici

---

4 Distances et Boules : Exemples et Questions/Réponses

Question 1 : L'ensemble des fonctions de $C([0,2],\mathbb{R})$ dont le graphe ne dépasse pas la région en bleu est la boule fermée $B'(f,1)$ pour la norme :

$||.||_1$ $\qquad$ $||.||_2$ $\qquad$ $||.||_\infty$



Question 2 : Dans $\mathbb{R}^2$, le carré plein du plan de sommets $A(-2,-3)$, $B(0,-3)$, $C(0,-1)$, $A(-2,-1)$, est :

1. La boule $B'((-1,-2),1)$ pour la norme $||.||_1$.
2. La boule $B'((-1,-2),1)$ pour la norme $||.||_2$.
3. La boule $B'((-1,-2),1)$ pour la norme $||.||_\infty$.
4. Aucune des réponses précédentes

Question 3 : On définit N_1 sur $C(]0,1[,\mathbb{R})$ par

$$N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|\,dt.$$

Alors N_1 n'est pas une norme car :

1. La séparation n'est pas vérifiée.
2. L'homogénéité n'est pas vérifiée.
3. L'inégalité triangulaire n'est pas vérifiée.
4. Pour une autre raison.

Explication en vidéo : Cliquez ici

---

5 Convergence de suites dans un espace vectoriel normé/espace métrique

Définition 5.1. Soit (E, d) un espace métrique, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'élements de E, et $a \in E$. On dit que $(a_n)_n$ converge vers a si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0 : d(a_n, a) < \epsilon$$

autrement dit, $(a_n)_n$ converge vers a dans E si et seulement $(d(a_n, a))_n$ converge vers 0 dans $\mathbb{R}$.

Exemples :

1. Dans $(\mathbb{R}^2, ||.||_\infty)$, la suite $\left(1 + \dfrac{1}{n}, 4 - \dfrac{7}{n^2}\right)$ converge vers $(1, 4)$.
2. La suite $\frac{E(10^n\sqrt{2})}{10^n}$ converge dans $\mathbb{R}$ mais pas dans $\mathbb{Q}$.
3. Dans $C([0,1], \mathbb{R})$, la suite $(f_n)_n$ définie par $f_n(x) = x^n$, converge vers la fonction nulle pour les normes $||.||_1$ et $||.||_2$, mais pas pour la norme $||.||_\infty$
4. Dans $C([0,1], \mathbb{R})$, la suite $(f_n)_n$ définie par $f_n(x) = \sqrt{n}\ x^n$, converge vers la fonction nulle pour la norme $||.||_1$, mais pas pour la norme $||.||_2$

Explication en vidéo : Cliquez ici

---

6 Normes équivalentes

Définition 6.1. Soit E un espace vectoriel, et N_1, N_2 deux normes sur E. On dit que N_1 et N_2 sont *équivalentes* si et seulement si, il existe deux constantes $C, D > 0$ telles que $N_1 < CN_2$ et $N_2 < DN_1$.

Remarque : $N_1 \sim N_2$ si et seulement si N_1/N_2 et N_2/N_1 sont des fonctions bornées sur $E \setminus \{0\}$.

Exemple : Sur $\mathbb{R}^n$, $||.||_1$, $||.||_2$ et $||.||_\infty$ sont deux à deux équivalentes.

Remarque : Sur un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes

Exemple : Sur $C([0,1], \mathbb{R})$, $||.||_1$, $||.||_2$ et $||.||_\infty$ sont deux à deux non équivalentes.

Proposition 6.2. *Soit E un espace vectoriel et N, N' deux normes sur E. Alors N et N' sont équivalentes si et seulement si toute suite qui converge pour l'une converge pour l'autre.*

Exercice : On définit sur $\mathbb{R}[x]$ les normes d'un polynôme

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 :$$

— $||P||_1 = |a_n| + |a_{n-1}| + \cdots + |a_0|$
— $||P||_2 = \sqrt{|a_n|^2 + |a_{n-1}|^2 + \cdots + |a_0|^2}$
— $||P||_\infty = \max\{|a_n|, |a_{n-1}|, \cdots, |a_0|\}$

Ces normes sont elles deux à deux équivalentes ? Justifier

Explication en vidéo : Cliquez ici

---

7 Ensembles ouverts et ensembles fermés - Définitions et exemples

Définition 7.1. Soit (E, d) un espace métrique, et A un sous-ensemble de E

1. On dit que A est un ***sous-ensemble ouvert de*** E si et seulement si pour tout $a \in A$, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$
2. On dit que A est un ***sous-ensemble fermé de*** E si et seulement si $E \setminus A$ est ouvert.

Remarque 7.2. — Un ensemble peut être ni ouvert ni fermé.
— Un ensemble peut être à la fois ouvert et fermé.

Exemples :
- $\mathbb{Z}$ est un sous-ensemble fermé, non ouvert de $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}^{+*}$ est un sous-ensemble ouvert, non fermé de $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}^{+}$ est un sous-ensemble fermé, non ouvert de $\mathbb{R}$.
- Un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}$. Un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}$.
- La partie du plan sur ou en dessous de la première bissectrice est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^2$.
- Dans l'espace métrique $\mathbb{Z}$ muni de la distance usuelle, tout sous-ensemble est à la fois ouvert et fermé.
- Soit (E, d) un espace métrique. Les sous-ensembles $\emptyset$ et E sont à la fois ouverts et fermés de E.

***Propriétés* :**
- Toute reunion d'ouverts est un ouvert.
- Toute intersection de fermés est un fermé.
- Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.
- Toute reunion finie de fermés est un fermé.

Explication en vidéo : Cliquez ici

---

8 Une boule ouverte (resp. fermée) est un ensemble ouvert (resp. fermé)

Proposition 8.1. *Soit (E, d) un espace métrique. Toute boule ouverte de E est sous-ensemble ouvert de E.*

Proposition 8.2. *Soit (E, d) un espace métrique. Toute boule fermée de E est sous-ensemble fermé de E.*

Explication en vidéo : Cliquez ici

---

9 Continuité de fonctions entre deux espaces vectoriels normés / espaces métriques

La notion de continuité d'une fonction f en un point a de son domaine de définition exprime l'idée selon laquelle, si x est "proche" de a, alors $f(x)$ est "proche" de $f(a)$. La définition exacte se fait dans le cadre d'espaces métriques, qui fournissent les outils nécessaires pour définir cette notion de "proximité" :

Définition 9.1. Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques, $f : E \longrightarrow E'$, et $a \in E$.

1. On dit que f est continue au point a ssi

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E : d(x,a) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \epsilon$$

2. On dit que f est continue ssi f est continue en tout point.

Remarque 9.2. 1. L'identité d'un espace dans lui même est continue.

2. Si f et g sont continues, alors $g \circ f$ est continue.
3. Les projections de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$ sont continues.
4. Les fonctions produit et somme de $\mathbb{K}^2$ dans $\mathbb{K}$ sont continues.
5. Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, et soient f, g deux applications de E dans F. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors si f et g sont continues, alors il en est de même pour $f+g$, $f.g$ et $\lambda.f$.

Le théorème suivant donne une caractérisation séquentielle de la continuité, c'est à dire une caractérisation de la continuité en termes de suites.

Théorème 9.3. *$f : E \longrightarrow F$ est continue ssi pour toute suite (x_n) dans E, si x_n converge vers un élément $x \in E$, alors $f(x_n)$ converge vers $f(x)$ dans F.*

Explication en vidéo : Cliquez ici

---

10 Comment montrer qu'un ensemble est ouvert ? ou fermé ?

Une méthode pratique pour montrer qu'un ensemble est ouvert (resp. fermé), est de montrer qu'il est l'image réciproque d'un ouvert (resp. fermé) par une application continue.

Proposition 10.1. *Soient (E,d) et (E',d') deux espaces métriques, et $f : E \longrightarrow E'$ une application. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est continue.*
2. *L'image réciproque par f de tout ouvert de E' est un ouvert de E.*
3. *L'image réciproque par f de tout fermé de E' est un fermé de E.*

Exemples :

— L'ensemble $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + \sin(yz) \leq 0\}$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^3$.

— L'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + e^{xy^2} > 0\}$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$.

— Le graphe de la fonction $x \mapsto x^2$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^2$.

Explication en vidéo : Cliquez ici

---

11 Comment montrer qu'un ensemble n'est pas ouvert ? ou pas fermé ?

Dans cette séquence, on expose une méthode pratique pour montrer qu'un sous-ensemble d'un espace métrique n'est pas ouvert, ou qu'il n'est pas fermé. Cette méthode est basée sur la caractérisation séquentielle des fermés, c'est à dire la caractérisation des fermés en termes de suites convergentes :

Théorème 11.1 (Caractérisation séquentielle des fermés)**.** *Soit (E,d) un espace métrique, et $A \subset E$. Alors A est un fermé de E si et seulement si pour toute suite $(a_n)_n$ d'éléments de E, si $(a_n)_n$ est convergente vers un élément $a \in E$, alors $a \in A$.*

Remarque 11.2. 1. Le théorème précédent ne dit pas que toute suite déléments de A est convergente. Il dit que si jamais elle converge, alors sa limite doit être dans A. Autrement dit, si A est fermé, on ne peut pas avoir une suite d'éléments de A qui converge vers un élément qui n'est pas dans A.

2. Pour montrer qu'un ensemble $A \subset E$ n'est pas fermé, il suffit de trouver une suite d'éléments de A qui converge vers un élément de $E \setminus A$.

Exemple : Dans l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}^2$, on considère l'ensemble A des point strictement au dessous de la parabole d'équation $y = x^2$:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x^2\}.$$

Alors A n'est pas fermé dans E, car la suite $\left((0, -\frac{1}{n})\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de A, qui converge vers le point $(0, 0)$, qui lui n'est pas dans A.

Le critère précédent permet aussi de montrer que qu'un ensemble n'est pas ouvert, en montrant que sont complémentaire n'est pas fermé. On a alors le résultat suivant :

Remarque 11.3. Pour montrer qu'un ensemble $A \subset E$ n'est pas ouvert, il suffit de trouver une suite d'éléments de $E \setminus A$ qui converge vers un élément de A.

Exercice :

1. Soit $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y - xy^2 + z = 0\}$. Alors A n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + xy^2 < 0\}$. Alors A n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
3. $\mathbb{Q}$ n'est ni ouvert ni fermé de $\mathbb{R}$.

Explication en vidéo : Cliquez ici

---

12 Intérieur, adhérence, frontière et voisinages

Définition 12.1. Soit (E, d) un espace métrique, $a \in E$, et $A \subset E$.

— On dit que a est intérieur à A, ou que A est un voisinage de a si et seulement si $\exists r > 0\ t.q.\ B(a, r) \subset A$

— On dit que a est adhérent à A si et seulement si $\forall r > 0, B(a, r) \cap A \neq \emptyset$

Terminologie et notations :

— L'ensemble des point intérieurs à A s'appelle **l'intérieur de** A, et est noté par $\mathring{A}$.

— L'ensemble des point adhérents à A s'appelle **l'adhérence de** A, et est noté par $\overline{A}$.

— La **fontière de** A, notée par $Fr(A)$, est l'ensemble des points adhérents et non intérieurs à A.

Proposition 12.2. *Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$.*

— $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$

— $A = \mathring{A}$ *si et seulement si A est ouvert*

— $x \in \overline{A}$ *si et seulement si il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x*

— $A = \overline{A}$ *si et seulement si A est fermé*

Exercice : Trouver les sous-ensembles suivants de l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}$:

1. $\mathring{\mathbb{Z}}$
2. $\overline{\mathbb{Z}}$
3. $\mathring{\mathbb{Q}}$

4. $\overline{\mathbb{Q}}$
5. $\overset{\circ}{\overline{]a,b[}}$
6. $\overline{]a,b[}$

Explication en vidéo : Cliquez ici

---

13 Compacité

Définition 13.1. Soit (E,d) un espace métrique et $A \subset E$. On dit que A est **compact** si et seulement si toute suite d'éléments de A admet une sous suite qui converge dans A.

Remarque 13.2. Ceci revient à dire que toute suite d'éléments de A admet une valeur d'adhérence dans A

***Exemples* :**
— Si A est fini, alors A est compact.
— $\mathbb{R}$ n'est pas compact.
— Une partie non bornée d'un espace E n'est jamais compacte.
— Une partie non fermée d'un espace E n'est jamais compacte.
— $[0,1[$ n'est pas compact.
— $[0,1]$ est compact.
— Les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les sous ensembles fermés bornés.

Explication en vidéo : Cliquez ici

---

14 Compacité : Théorèmes de Bolzano-Weierstrass et Heine-Borel

Théorème 14.1 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Une suite bornée de $\mathbb{R}$ admet au moins une valeur d'adhérence.*

Corollaire 14.2. *Une suite bornée de $\mathbb{K}^n$ admet au moins une valeur d'adérence.*

Théorème 14.3 (Heine-Borel)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, et $A \subset E$. Alors A est compact si et seulement si A est fermé borné.*

Explication en vidéo : Cliquez ici

---

15 Exercices : Compacité de $O_n(\mathbb{R})$, Densité de $GL_n(\mathbb{C})$

Montrer que le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est compact.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{C})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Solution en vidéo : Cliquez ici

---

16 Exercice : L'ensemble des matrices complexes diagonalisables est dense

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'ensemble $\Delta_n(\mathbb{C})$ des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Que peut on dire de $\Delta_n(\mathbb{R})$?

Solution en vidéo : Cliquez ici

---

17 Exercice : $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs, $GL_n(\mathbb{R})$ ne l'est pas

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs, alors que $GL_n(\mathbb{C})$ l'est.

Explication en vidéo : Cliquez ici

---

18 Exercice : valeurs d'adhérence d'une suite dont le pas tend vers 0

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée telle que $(u_{n+1} - u_n)_n$ converge vers 0. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_n$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Solution en vidéo : Cliquez ici

---

19 Un théorème de point fixe

Soit K une partie compacte d'un espace métrique E, et $f : E \longrightarrow E$ vérifiant

$$\forall x \neq y, d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

1. Montrer que f admet un unique point fixe. Indication : considérer la fonction $g(x) := d(f(x), x)$
2. Soit $u_0 \in K$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge vers le point fixe de f.

---

20 Exercice : Adhérence dans un espace de suites

Soit E l'ensemble des suites réelles convergentes muni de $||.||_\infty$, et soit A le sous-ensemble des suites à support fini. Trouver l'intérieur et l'adhérence de A dans E.

---

21 Sous groupes de $(\mathbb{R}, +)$: soit discrets soit denses

Soit H un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$, $a = inf\{H \cap \mathbb{R}^+*\}$.

1. Si $a \neq 0$, montrer que $H = a.\mathbb{Z}$
2. Si $a = 0$ montrer que H est dense dans $\mathbb{R}$.

---

22 Le noyau d'une forme linéaire discontinue est dense

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $\varphi : E \longrightarrow K$ une forme linéaire sur E.

1. Supposons que φ est continue. Montrer que $Ker\ \varphi$ est fermé dans E.
2. Supposons que φ est discontinue. Montrer que $Ker\ \varphi$ est dense dans E.

Explication en vidéo : Cliquez ici
