Colles et classiques de maths en prépa

F. Maalouf

Pour une version mise à jour de ce document, visitez mon site

Contents

1 Nombres réels

1.1 Partie entière d'une fraction (mpsi/pcsi)

Soit $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Eléments de solution: On a successivement

$$\begin{aligned}
\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \quad & \Longrightarrow \quad n\lfloor x \rfloor \leq nx < n\lfloor x \rfloor + n \\
& \Longrightarrow \quad n\lfloor x \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor < n\lfloor x \rfloor + n \\
& \Longrightarrow \quad \lfloor x \rfloor \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} < \lfloor x \rfloor + 1 \\
& \Longrightarrow \quad \lfloor x \rfloor \leq \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor < \lfloor x \rfloor + 1 \\
& \Longrightarrow \quad \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor
\end{aligned}$$

Une autre façon de comprendre ce résultat c'est en représentant tous les nombres en question en base n. La multiplication (resp. division) par n revient à déplacer la virgule d'une place à droite (resp. à gauche), et prendre la partie entière revient a effacer la partie après la virgule. Supposons que l'écriture de x en base n est

$$x : \qquad c_p c_{p-1} \cdots c_0 \ , \ c_{-1} c_{-2} \cdots$$

alors les représentations en base n de $nx, \lfloor nx \rfloor$, $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ et $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor$ sont successivement:

$$\begin{aligned}
nx : & \qquad c_p c_{p-1} \cdots c_0 c_{-1} \ , \ c_{-2} \cdots \\
\lfloor nx \rfloor : & \qquad c_p c_{p-1} \cdots c_0 c_{-1} \\
\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} : & \qquad c_p c_{p-1} \cdots c_0 \ , \ c_{-1}
\end{aligned}$$

et

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor : \qquad c_p c_{p-1} \cdots c_0$$

d'où le résultat voulu.

1.2 Une somme de parties entières (mpsi/pcsi)

Soit $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor.$$

Indication: considérer la division euclidienne de $\lfloor nx \rfloor$ par n.

Eléments de solution: Posons $\lfloor nx \rfloor = qn + r$, avec $0 \leq r < n$. On sait que $q = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor$, donc d'après l'exercice 1.1, $q = \lfloor x \rfloor$, et on a

$$\lfloor nx \rfloor = n\lfloor x \rfloor + r \qquad \text{avec} \qquad 0 \leq r < n$$

Chacun des termes $\left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor$ est égal soit à $\lfloor x \rfloor$ soit à $\lfloor x \rfloor + 1$. Supposons que pour les a dernières valeurs de k, $\left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$, et pour les $n - a$ restantes $\left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$. On devra alors avoir

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = (n-a)\lfloor x \rfloor + a(\lfloor x \rfloor + 1) = n\lfloor x \rfloor + a,$$

Il suffit alors de montrer que $a = r$, c.à.d montrer :

$$\text{si} \quad 0 \leq k < n - r \quad \text{alors} \quad \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

et

$$\text{si} \quad n - r \leq k < n \quad \text{alors} \quad \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$$

<u>cas 1</u>: Supponsons $0 \leq k < n - r$. Alors

$$\left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{nx + k}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor nx + k \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor + k}{n} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{n\lfloor x \rfloor + r + (n - r - 1)}{n} \right\rfloor \leq \left\lfloor \lfloor x \rfloor + 1 - \frac{1}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

<u>cas 2</u>: Supponsons $n - r \leq k < n$. Alors

$$\left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{nx + k}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor nx + k \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor + k}{n} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{n\lfloor x \rfloor + r + (n - r)}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$$

1.3 Densité de l'image des entiers par une fonction – 1(mpsi/pcsi)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante telle que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x + 1) - f(x) = 0.$$

Montrer que $\{f(n) - \lfloor f(n) \rfloor, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0, 1]$.

Eléments de solution: Soit $\epsilon > 0$, et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \geq n_0, f(x + 1) - f(x) < \epsilon$. Comme $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$, on peut alors trouver un premier $n_1 \geq n_0$ tel que $f(n_1) > f(n_0) + 1$. La suite $(f(k))_{n_0 \leq k < n_1}$ est une suite strictement croissante d'élément de $[f(n_0), f(n_0) + 1]$ telle que la distance entre deux termes successifs et $< \epsilon$. La suite des parties décimales $(f(k) - \lfloor f(k) \rfloor)$ est alors une suite de $[0, 1]$, et tout élément de $[0, 1]$ est à une distance au plus ϵ d'un élément de cette suite. Comme ϵ peut être choisi arbitrairement petit, on a la densité.

1.4 Densité de l'image des entiers par une fonction – 2 (mpsi/pcsi)

Montrer que $A := \{\cos(\ln n), n \in \mathbb{N}^*\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

Eléments de solution: Soit $a \in [-1, 1]$ et $\epsilon > 0$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, \ln(n + 1) - \ln(n) < \epsilon$, et soit $x > \ln n_0$ tel que $\cos x = a$. Comme $\lim_{n \to +\infty} \ln(n) = +\infty$, on peut alors trouver $p \geq n_0$ tel que $\ln p \leq x$ et $\ln(p + 1) \geq x$. On a alors $\cos(\ln p) \in A$ et

$$|a - \cos(\ln p)| = |\cos x - \cos(\ln p)| \leq |x - \ln p| \leq |\ln(p + 1) - \ln p| < \epsilon$$

Comme ϵ peut être choisi arbitrairement petit, on a la densité.

1.5 Densité d'un ensemble de réels -1 (mpsi/pcsi)

Soit $A = \{\sqrt{m} - \sqrt{n}, (m, n) \in \mathbb{N}^*\}$. Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$.

Eléments de solution: Soit $a \in \mathbb{R}^+$ et $\epsilon > 0$. Montrons qu'il existe $x \in A$ tel que $|x - a| \leq \epsilon$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{m + 1} - \sqrt{m} < \epsilon$, et $p \in \mathbb{N}$ tel que $p(\sqrt{m + 1} - \sqrt{m}) \leq a$ et $(p + 1)(\sqrt{m + 1} - \sqrt{m}) \geq a$. On a alors $d(a, p(\sqrt{m + 1} - \sqrt{m})) \leq \epsilon$, et $p(\sqrt{m + 1} - \sqrt{m}) = \sqrt{p^2(m + 1)} - \sqrt{p^2 m} \in A$. On a alors la densité dans $\mathbb{R}^+$. La densité dans $\mathbb{R}^-$se montre de façon pareille.

1.6 Densité d'un ensemble de réels -2 (mpsi/pcsi)

Soit $A \subset \mathbb{R}^+$ non borné, et soit

$$B = \left\{\frac{a}{n}, a \in A \text{ et } n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Montrer que B est dense dans $\mathbb{R}^+$.

Eléments de solution: Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $\epsilon > 0$. Montrons qu'il existe $a \in A$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\alpha \leq \dfrac{a}{n} \leq \alpha + \epsilon$, qui est équivalent à $n\alpha \leq a \leq n\alpha + n\epsilon \quad (*)$. Or pour n plus grand qu'un certain n_0, $n\alpha + n\epsilon \geq (n+1)\alpha$, donc la réunion $\bigcup_{n \geq n_0} [n\alpha, n\alpha + n\epsilon]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $[l, +\infty[$. Or A n'est pas majoré, donc contient un élément a de cet intervalle, et a appartient alors à l'un des intervalles $[n\alpha, n\alpha + n\epsilon[$ pour un certain n. Les nombres a et n ainsi trouvés vérifient alors la condition $(*)$.

2 Nombres complexes

2.1 Un calcul à connaître - Une somme de sinus (mpsi/pcsi)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin kx$.

Eléments de solution: Si $x \in \pi\mathbb{Z}$, alors la somme est clairement nulle. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. On rappelle que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$,

$$e^{ia} + e^{ib} = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}},$$

et

$$1 - e^{ib} = e^{i.0} + e^{i(b+\pi)} = 2\cos\left(\frac{\pi+b}{2}\right) e^{i\left(\frac{b+\pi}{2}\right)} = -2i\sin\left(\frac{b}{2}\right) e^{i\frac{b}{2}}.$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \sin kx &= \mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{-2i\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) e^{i\frac{(n+1)x}{2}}}{-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}}}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) e^{i\frac{nx}{2}}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right) \\
&= \\
&= \frac{\sin\frac{nx}{2} \,.\, \sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

Solution sur YouTube: Cliquez ici

2.2 Un produit de sinus (mpsi/pcsi)

Soit n un entier naturel ≥ 2. Calculer le produit

$$p_n := \prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n}.$$

Eléments de solution:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} &= \prod_{k=1}^{n-1} \frac{e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{-\frac{ik\pi}{n}}}{2i} \\
&= \frac{1}{(2i)^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}} \left(1 - e^{-\frac{2ik\pi}{n}}\right) \\
&= \frac{1}{(2i)^{n-1}} \left(\prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) \left(\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{-\frac{2ik\pi}{n}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{(2i)^{n-1}} \left(e^{\frac{i\pi}{n}\frac{(n-1)n}{2}}\right) \left(\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{-\frac{2ik\pi}{n}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{(2i)^{n-1}} \left(i^{n-1}\right) \left(\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{-\frac{2ik\pi}{n}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{(2)^{n-1}} (1 + 1 + 1^2 + \cdots + 1^{n-1}) = \frac{n}{2^{n-1}}
\end{aligned}$$

Solution sur YouTube: Cliquez ici

2.3 Homographies préservant le cercle unité (mpsi/pcsi)

Une homographie est une fonction complexe définie par $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, où a, b, c et d sont des constantes fixées. Soit f une homographie définie comme ci-dessus et vérifiant $f(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$.

1. Montrer que $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2$, et $a\bar{b} = c\bar{d}$.
2. Montrer qu'on a $|a| = |c|$ et $|b| = |d|$, ou $|a| = |d|$ et $|b| = |c|$, puis montrer que le cas $|a| = |c|$ et $|b| = |d|$ est impossible.
3. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f : z \mapsto e^{i\alpha} \dfrac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$.

Eléments de solution:

1. Soit $z \in \mathbb{U}$ quelconque. Comme $|f(z)| = 1$, alors $|az+b|^2 = |cz+d|^2$. Or
$$|az+b|^2 = (az+b)(\bar{a}\bar{z}+\bar{b}) = |a|^2 + |b|^2 + 2\text{Re}(a\bar{b}z)$$
et
$$|cz+d|^2 = (cz+d)(\bar{c}\bar{z}+\bar{d}) = |c|^2 + |d|^2 + 2\text{Re}(c\bar{d}z)$$
L'égalité de ces deux expressions donne
$$|a|^2 + |b|^2 - |c|^2 - |d|^2 = -2\text{Re}\left((a\bar{b} - c\bar{d})z\right).$$
L'expression de gauche étant indépendante de z, il en est alors de même pour celle de droite, et on a alors $a\bar{b} - c\bar{d} = 0$, donc aussi $|a|^2 + |b|^2 - |c|^2 - |d|^2 = 0$. D'où le résultat voulu.
2. D'après la question précédente, $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2$, et $2|a|.|b| = 2|c|.|d|$, donc
$$(|a| + |b|)^2 = (|c| + |d|)^2 \qquad \text{et} \qquad (|a| - |b|)^2 = (|c| - |d|)^2.$$
Il en suit qu'on est dans l'un des cas suivants:
$$|a| + |b| = |c| + |d| \qquad \text{et} \qquad |a| - |b| = |c| - |d|,$$
ou
$$|a| + |b| = |c| + |d| \qquad \text{et} \qquad |a| - |b| = |d| - |c|.$$
La résolution de ces deux systèmes séparément donne $|a| = |c|$ et $|b| = |d|$ pour le premier cas, et $|a| = |d|$ et $|b| = |c|$ pour le second. Si $|a| = |c|$, on ecrit alors $a = e^{i\alpha}c$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$, et l'équation $a\bar{b} = c\bar{d}$ donne $b = e^{i\alpha}d$. Mais alors f est constante, donc non surjective sur $\mathbb{U}$.

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $e^{-i\alpha}\bar{a} = d$. Ce nombre α existe car $|a| = |d|$. Comme $a\bar{b} = c\bar{d}$, alors on a aussi $c = e^{-i\alpha}\bar{b}$. Il vient alors pour tout z,

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{az+b}{e^{-i\alpha}\bar{b}z + e^{-i\alpha}\bar{a}} = e^{i\alpha}\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}.$$

3 Théorèmes de Rolle, acroissements finis

3.1 La dérivée d'un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$ (mpsi/pcsi)

Montrer que la dérivée d'un polynôme réel scindé sur $\mathbb{R}$ est encore un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

3.2 Une autre application du théorème de Rolle (mpsi/pcsi)

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \lambda f(c).$$

Solution sur YouTube: Cliquez ici

4 Polynômes

4.1 Polynômes de Hilbert (mpsi/pcsi)

On pose $H_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $$H_n = \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. En déduire que le produit de n entiers consécutifs dans $\mathbb{Z}$ est divisible par $n!$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg(P) \leq n$. Montrer qu'il y a une équivalence entre:
   (a) $P(\mathbb{Z}) \subset Z$
   (b) $P(k) \in \mathbb{Z}$ pour tout $k = 0, 1, \cdots, n$
   (c) il existe $(\lambda_0, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k H_k$

Solution sur YouTube: Cliquez ici

4.2 Polynômes de Legendre – 1 (mpsi/pcsi)

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$L_n(X) := \left((X^2-1)^n\right)^{(n)}.$$

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de L_n.
2. Montrer que L_n admet n racines réelles distinctes, et qu'elles sont toutes dans $]-1, 1[$.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

4.3 Polynômes de Legendre – 2(mpsi/pcsi)

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$L_n(X) := \left((X^2-1)^n\right)^{(n)}.$$

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de L_n.
2. Montrer que la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale pour le produit scalaire $< \ | \ >$ défini par
$$< P|Q >= \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$
3. Montrer que L_n admet n racines réelles distinctes, et qu'elles sont toutes dans $]-1, 1[$.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

4.4 Polynômes de Tchebychev – 1(mpsi/pcsi)

Les polynômes de Tchebychev de première et seconde espèce sont les polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, définis respectivement par:

$$\cos n\theta = T_n(\cos\theta) \qquad \text{et} \qquad \sin n\theta = \sin\theta \,.\, U_n(\cos\theta)$$

1. Montrer que les T_n et U_n existent, sont uniques, et sont donnés respectivement par
$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k\binom{n}{2k}x^{n-2k}(1-x^2)^k \quad \text{et} \quad U_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2}\rfloor}(-1)^k\binom{n}{2k+1}x^{n-2k-1}(1-x^2)^k$$
2. Montrer que $\forall x \in [-1,1], T_n(x) = \cos(n\arccos x)$ et $\forall x \in]-1,1[, U_n(x) = \dfrac{\sin(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$
3. Montrer que $T_n' = nU_n$
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$. En déduire les degrés et coefficients dominants de T_n et U_n.
5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, T_n$ a n racines réelles distinctes, toutes dans l'intervalle $]-1,1[$. Calculer ces racines, et en déduire une factorisation de T_n.
6. Trouver les extréma de T_n sur $[-1,1]$, et les points où ils sont atteints.
7. Monter que si Q est un polynôme de degré $n \geq 1$ et de coefficient dominant 2^{n-1}, alors $||Q||_\infty \geq 1 = ||T_n||_\infty$, la norme $||.||_\infty$ étant calculée sur $[-1,1]$.

Eléments de solution:

1. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a
$$\begin{aligned}
\cos n\theta + i\sin n\theta &= (e^{i\,\theta})^n \\
&= (\cos\theta + i\sin\theta)^n \\
&= \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(\cos\theta)^{n-p}(i\,\sin\theta)^p \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2k}(\cos\theta)^{n-2k}(i\,\sin\theta)^{2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2k+1}(\cos\theta)^{n-2k-1}(i\,\sin\theta)^{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k\binom{n}{2k}(\cos\theta)^{n-2k}(\sin\theta)^{2k} + i\sin\theta\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2}\rfloor}(-1)^k\binom{n}{2k+1}(\cos\theta)^{n-2k-1}(\sin\theta)^{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k\binom{n}{2k}(\cos\theta)^{n-2k}(1-\cos^2\theta)^k \\
&\qquad + i\sin\theta\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2}\rfloor}(-1)^k\binom{n}{2k+1}(\cos\theta)^{n-2k-1}(1-\cos^2\theta)^k \\
&= T_n(\cos\theta) + i\sin\theta\,.\,U_n(\cos\theta)
\end{aligned}$$
d'où le résultat annoncé.

2. Soit $x \in [-1,1]$ et $\theta = \arccos x$. Alors
$$T_n(x) = T_n(\cos\theta) = \cos n\theta = \cos(n\arccos x).$$
Si en plus $x \in]-1,1[$, alors $\sin\theta \neq 0$ et on a
$$U_n(x) = U_n(\cos\theta) = \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,
$$-\sin\theta\,.\,T_n'(\cos\theta) = (T_n(\cos\theta))' = (\cos n\theta)' = -n\sin n\theta = -n\sin\theta\,.\,U_n(\cos\theta)$$
Les fonctions polynomiales T_n' et nU_n coincident sur un ensemble infini, en l'occurence l'ensemble des $\cos\theta, \theta \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$, donc ces deux polynômes sont égaux.

4. On va utiliser l'identité
$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}.$$
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors
$$\begin{aligned} T_{n+1}(\cos\theta) + T_{n-1}(\cos\theta) &= \cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta \\ &= 2\cos n\theta\cos\theta \\ &= 2\cos\theta\,.\,T_n(\cos\theta) \end{aligned}$$
Les fonctions polynomiales $x \mapsto T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x)$ et $x \mapsto 2xT_n(x)$ coincident sur un ensemble infini, en l'occurence l'ensemble des $\cos\theta, \theta \in \mathbb{R}$, ces deux polynômes sont alors égaux. On en déduit par récurrence que pour tout n, T_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}.

5. Les réels $\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right), k \in [|0, n-1|]$ sont n réels deux à deux distincts, et sont tous racines de T_n car
$$T_n\left(\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)\right) = \cos\left(n\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0.$$
Comme $\deg T_n = n$, ce sont les seules racines, et alors
$$T_n(x) = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(x - \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)\right).$$

6. L'intervalle $[-1,1]$ est compact et T_n définit une fonction polynomiale donc continue, qui est alors bornée et atteint ses bornes sur $[-1,1]$. Soit $x \in [-1,1]$, et posons $\theta := \arccos x$. Il vient
$$|T_n(x)| = |T_n(\cos\theta)| = |\cos n\theta| \leq 1.$$
On voit qu'on a l'équivalence
$$|T_n(x)| = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \cos\frac{k\pi}{n}\text{pour un certain } k \in [|0, n|]$$
Le maximum est 1, et c'est atteint en chacun des nombres $\cos\frac{k\pi}{n}$ avec $k \in [|0,n|] \cap 2\mathbb{N}$. Le minimum est -1 et c'est atteint en chacun des nombres $\cos\frac{k\pi}{n}$ avec $k \in [|0,n|] \cap (2\mathbb{N}+1)$.

7. Soit Q un polynôme de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} et supposons pour une contradiction que $||Q||_\infty < 1$. Pour $k \in [|0,n|]$, soit $x_k := \cos\frac{k\pi}{n}$. D'après la question précédente, $||T_n||_\infty = 1$, et en plus $T_n(x_k) = 1$ si k est paire, et -1 si k est impaire. Comme $||Q||_\infty < 1$ alors
$$Q(x_k) - T_n(x_k) < 0 \text{ si } k \in [|0,n|] \cap 2\mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad Q(x_k) - T_n(x_k) > 0 \text{ si } k \in [|0,n|] \cap (2\mathbb{N}+1)$$
Le polynôme $Q - T_n$ change de signe au moins n fois, c'est donc un polynôme de degré au moins n, contradiction.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

4.5 Polynômes de Tchebychev – 2(mpsi/pcsi)

Les polynômes de Tchebychev de première espèce sont les polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall\theta\in\mathbb{R}, \cos n\theta = T_n(\cos\theta).$$

1. Montrer que pour tout $n\geq 1$, $T_{n+1}(x)+T_{n-1}(x)=2XT_n(x)$
2. Montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale pour le produit scalaire défini sur $\mathbb{R}[x]$ par

$$< P,Q >= \int_{-1}^{1}\frac{P(t).Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

3. Soit A_n l'ensemble des polynômes réels de degré n et de coefficient dominant 1. Montrer que

$$\inf_{P\in A_n}\int_{-1}^{1}\frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

est atteinte pour un P proportionnel à T_n. Calculer ce inf.

Eléments de solution:

1. Voir question 4 de l'exercice 4.4.
2. Soient m et n deux entiers naturels distincts et montrons que $< T_n, T_n >= 0$.

$$\begin{aligned}
< T_m, T_n > &= \int_{-1}^{1}\frac{T_m(t).T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \qquad\qquad \text{posons } t=\cos\theta\\
&= -\int_{0}^{\pi}\frac{T_m(\cos\theta).T_n(\cos\theta)}{\sqrt{1-\cos^2 t}}\,(-\sin\theta)\,d\theta\\
&= \int_{0}^{\pi}\cos m\theta\,.\,\cos n\theta\,d\theta\\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\cos(m+n)\theta\,+\,\cos(m-n)\theta\;\,d\theta\\
&= 0
\end{aligned}$$

3. On restreint le produit scalaire à $\mathbb{R}_n[x]$, soit pr la projection orthogonale sur l'hyperplan $R_{n-1}[x]$. La borne inférieure demandée n'est autre que le carré de la distance du polynôme x^n à $R_{n-1}[x]$, et elle est donnée par $||x^n-pr(x^n)||^2$. Le polynôme P est alors égal à $x^n-pr(x^n)$, et il est orthogonal à $R_{n-1}[x]$. Or d'après la question précédente, $R_{n-1}[x]^{\perp}=vect(T_n)$, donc $P=\lambda T_n$, et comme P est unitaire, alors $P=\frac{1}{2^{n-1}}T_n$. On calcule la borne inférieure:

$$\begin{aligned}
\inf_{P\in A_n}\int_{-1}^{1}\frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt &= \frac{1}{2^{2n-2}}\int_{-1}^{1}\frac{\left(T_n(t)\right)^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\\
&= \frac{1}{2^{2n-2}}\int_{0}^{\pi}\cos^2\,n\theta\,d\theta\\
&= \frac{\pi}{2^{2n-1}}
\end{aligned}$$

Solution sur YouTube: Cliquez ici

4.6 Interpolation de Lagrange

Soit $n \geq 1$ un entier naturel, et $a_1, \cdots, a_n$ des nombres réels deux-à-deux distincts.

1. Pour tout $k \in [|1, n|]$, trouver un polynôme $L_k \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n-1$, tel que $L_k(a_k) = 1$, et pour tout $j \neq k$, $L_k(a_j) = 0$
2. Soit $(b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Trouver un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $\leq n-1$ tel que pour tout k, $P(a_k) = b_k$.
3. Montrer que les L_k forment une base $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, et trouver la matrice de passage de $(L_k)_{k=1,\cdots,n}$ à $(X^k)_{k=0,\cdots,n-1}$.

Eléments de solution:

1. On prend $L_k(X) = \prod_{i \neq k} \left(\frac{X - a_i}{a_k - a_i} \right)$. Les L_k s'appellent "*polynômes de Lagrange associés aux points* $a_1, \cdots, a_n$".
2. On prend $P(X) = \sum_{k=1}^{n} b_k L_k(X)$.
3. D'après la question précédente, la famille $(L_1, \cdots, L_n)$ est une famille génératrice $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Or c'est une famille à n éléments, et $\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = n$, donc c'en est une base. Les colonnes de la matrice de passage est celle des coefficients des X^j dans la base $(L_k)_{k=1,\cdots,n}$. D'après la question précédente il vient
$$X^j = \sum_{k=1}^{n} a_k^j L_k(X)$$
On reconnait la matrice de Vandermonde des a_i.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

4.7 Théorème de Lucas

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré ≥ 2. Montrer que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P.

Eléments de solution: Soit n le degré de P, C son coefficient dominant, et $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ ses racines. On vérifie que
$$P'(X) = C \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{k \neq i} (X - \alpha_k) \right)$$
Soit z une racine de P' qui n'est pas racine de P. On a alors
$$0 = P'(z) = \frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z - \alpha_1} + \cdots + \frac{1}{z - \alpha_n} = \frac{\bar{z} - \bar{\alpha_1}}{|z - \alpha_1|^2} + \cdots + \frac{\bar{z} - \bar{\alpha_n}}{|z - \alpha_n|^2} \qquad (*)$$
Posons pour tout $k = 1, \cdots, n$
$$\lambda_k := \frac{1}{|z - \alpha_k|^2} \qquad \text{et} \qquad \mu_k := \frac{\lambda_k}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_k}$$
Les μ_1 sont positifs et $\sum \mu_i = 1$. L'identité $(*)$ donne $z = \mu_1 \alpha_1 + \cdots + \mu_n \alpha_n$, d'où le résultat voulu.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

4.8 Image des racines d'un polynôme (mpsi/pcsi)

Soit $P = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{C}[X]$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que les racines de P forment un parallélogramme.
2. Même question avec un rectangle.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

4.9 La limite uniforme de polynômes est un polynôme (mp/pc)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un ensemble non borné, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers f sur I. Montrer que f est une fonction polynomiale.

Eléments de solution: Comme $(P_n)_n$ converge uniformément, alors elle est uniformément de Cauchy. Fixons $\epsilon > 0$, et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $\sup_I |P_n - P_{n_0}| \leq \epsilon$. Comme I n'est pas borné alors $P_n - P_{n_0} = 0$ pour tout $n \geq n_0$. La suite $(P_n)_n$ est stationnaire et $f = P_{n_0}$.

4.10 Polynômes de Bernstein et théorème de Stone-Weierstrass (mp/pc)

Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le n^{ieme} polynôme de Bernstein associé à f par

$$B_n(f) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}.$$

1. Enoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit $x \in [0, 1]$ et $Z_{n,x}$ une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et x. Donner $\mathbb{E}(Z_{n,x})$ et $\mathbb{V}(Z_{n,x})$.
3. Soit $x \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\delta > 0$, et A_n l'ensemble des éléments $k \in [|0, n|]$ tels que $\left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta$, et soit B_n le complémentaire de A_n dans $[|0, n|]$. Montrer que
$$\left|\sum_{k\in B_n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\right| \leq \frac{x(1-x)}{n\delta^2}$$
4. Montrer que $B_n(f)$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

Eléments de solution:

1. Soit X une variable aléatoire réelle, d'esperance m et de variance σ^2 finies. Alors pour tout $\alpha > 0$,
$$\mathbb{P}\left[|X - m| \geq \alpha\right] \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2}$$
2. $$\mathbb{E}(Z_{n,x} = nx) \qquad\qquad \mathbb{V}(Z_{n,x}) = nx(1-x)$$
3. On a $\left|\frac{k}{n} - x\right| \leq \delta$ si et seulement si $|k - nx| \leq n\delta$. La somme $\sum_{k\in B_n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ représente

alors probabilité que $|Z_{n,x} - E(Z_{n,x})| \geq n\delta$, donc d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev,

$$\begin{aligned}\sum_{k\in B_n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} &= \mathbb{P}(|Z_{n,x} - nx| \geq n\delta) \\ &\leq \frac{V(Z_{n,x})}{n^2\delta^2} \\ &= \frac{x(1-x)}{n\delta^2}\end{aligned}$$

4. La fonction f est continue sur $[0,1]$, donc uniformément continue et bornée par un certain $M \in \mathbb{R}^+$. Fixons $\epsilon > 0$, et soit $\delta > 0$ tel que,

$$\forall (x,y) \in I^2, |x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

$$\begin{aligned}|f(x) - B_n(f)(x)| &= \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \right| \\ &\leq \left| \sum_{k\in A_n} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \right| + \left| \sum_{k\in B_n} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \right| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + 2M \left| \sum_{k\in B_n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \right| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{2Mx(1-x)}{n\delta^2}\end{aligned}$$

valeur qui peut être rendue $\leq \epsilon$ en prenant n suffisement grand, uniformément pour tous les x.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

5 Séries numériques

5.1 Nature d'une série par calcul d'un conjugué (mpsi/pcsi)

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sin\left(\pi(4+\sqrt{11})^n\right)$.

1. Montrer que pour tout n,$u_n = -\sin\left(\pi(4-\sqrt{11})^n\right)$.
2. En déduire que $\sum u_n$ est une série numérique convergente.

Eléments de solution:

1. Par application de la formule du binôme de Newton à $(4+\sqrt{11})^n$, on trouve pour tout n deux entiers α_n et β_n tels que $(4+\sqrt{11})^n = \alpha_n + \beta_n\sqrt{11}$. La même formule appliquée à $(4-\sqrt{11})^n$ montre que $(4-\sqrt{11})^n = \alpha_n - \beta_n\sqrt{11}$. La somme $(4+\sqrt{11})^n + (4-\sqrt{11})^n = 2\alpha_n$ est un entier pair, d'où
$$u_n = \sin\left(\pi(4+\sqrt{11})^n\right) = \sin\left(-\pi(4-\sqrt{11})^n + 2\alpha_n\pi\right) = -\sin\left(\pi(4-\sqrt{11})^n\right).$$
2. D'après la question précédente et le fait que $|4-\sqrt{11}| < 1$, $u_n \sim -\pi(4-\sqrt{11})^n$, qui est le terme général d'une série géométrique convergente. D'où le résultat.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

5.2 Série à terme général décroissant (mpsi/pcsi)

Soit $(u_n)_n$ une suite dércroissante de réels strictement positifs telle que $\sum u_n$ converge.

1. Montrer que $u_n =_{+\infty} o\left(\frac{1}{n}\right)$
2. Le résultat de la question précédente reste-t-il vrai sans la condition que $(u_n)_n$ est décroissante?

Eléments de solution:

1. Supposons que $u_n \neq_{+\infty} o\left(\frac{1}{n}\right)$ et montrons que $\sum u_n$ diverge. Soit $r > 0$ tel qu'il existe des entiers n arbitrairement grands vérifiant $u_n \geq \frac{r}{n}$, et soit $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de tels entiers. Sans perte de généralité, on peut supposer que pour tout k, $n_{k+1} \geq 2n_k$. Soit pour tout k,
$$r_k = \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} u_i.$$
Comme la suite $(u_n)_n$ est décroissante, que $n_{k+1} \geq 2n_k$, et que $u_{n_{k+1}} \geq \dfrac{r}{n_{k+1}}$, on a successivement
$$r_k \geq \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} u_{n_{k+1}} \geq \frac{n_{k+1}}{2}.u_{n_{k+1}} \geq \frac{r}{2}.$$
La série $\sum r_k$ est alors divergente, et il en est de même pour $\sum u_n$.
2. Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{n}$ si n est une puissance de 2, et $u_n = 0$ sinon. Clairement, $\sum u_n$ est convergente, alors que $u_n \neq_{+\infty} o\left(\frac{1}{n}\right)$

6 Analyse asymptotique

6.1 Intégrales de Wallis et formule de Stirling (mpsi/pcsi)

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale W_n définie par

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \; dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \; dx$$

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!} \qquad \text{et} \qquad v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right).$$

1. Montrer que la suite $(W_n)_n$ est convergente. Calculer W_{2n} et W_{2n+1} sous forme de produits.
2. En déduire la formule de Wallis:
$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2n(2n-2)\cdots 2}{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}\right)^2$$
3. Etudier la convergence de la série $\sum v_n$, et en déduire que u_n converge vers un réel $\lambda > 0$.
4. Montrer que $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, en déduire la formule de Stirling:
$$n! \sim_{+\infty} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

Eléments de solution:

1. C'est une suite décroissante minorée par 0 donc convergente vers une limite $l \geq 0$. On écrit $\sin^n x = \sin^{n-1} x . \sin x$ et une intégration par parties donne $W_n = \dfrac{n-1}{n} W_{n-2}$. On a alors
$$W_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{2n(2n-2)\cdots 2}\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad W_{2n+1} = \frac{2n(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 1}$$
2. La suite des W_n étant positive et décroissante, on a $\dfrac{W_{2n+2}}{W_{2n}} \leq \dfrac{W_{2n+1}}{W_{2n}} \leq \dfrac{W_{2n}}{W_{2n}}$, il en suit que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{W_{2n+1}}{W_{2n}} = 1,$$
et en remplaçant les expressions de W_{2n}, W_{2n+1} par les expressions obtenues dans 1 on obtient l'identité voulue.
3. Un calcul simple montre que
$$v_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} - 1 = \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$
d'où $\sum v_n$ converge vers un réel θ. Or une simplification télescopique montre aussi que
$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_1) = \ln(u_{n+1}) + 1,$$
d'où $\lim\limits_{n\to\infty} \ln u_n = \theta - 1$, et $\lim_{n\to\infty} u_n = \lambda := e^{\theta-1} > 0$.

4. Une réécriture de l'égalité de Wallis donne
$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\frac{2^{4n}(n!)^4}{((2n)!)^2}.$$
En remplaçant dans cette expression, $n!$ et $(2n)!$ par leurs équivalents, on obtient
$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\frac{2^{4n}n^{4n}e^{-4n}n^2\lambda^2}{\lambda^4(2n)^{4n}e^{-4n}2n} = \frac{1}{2\lambda^2},$$
d'où $\lambda = \sqrt{2\pi}$ et
$$n! \sim_\infty n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}.$$

Solution sur YouTube: Cliquez ici

6.2 Développement asymptotique de la série harmonique (mpsi/pcsi)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Soit $p > 1$. Donner un équivalent de $R_n := \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^p}$
2. Montrer que la suite $(H_n - \ln n)_n$ converge vers un certain réel γ (γ est appelé "constante d'Euler"). Déduire que
$$H_n = \ln n + \gamma + o(1).$$
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $t_n = H_n - \ln n - \gamma$. Déterminer un équivalent de $t_{n+1} - t_n$, puis de t_n. Déduire que
$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$
4. Avec un raisonnement similaire, montrer que
$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Solution sur YouTube: Cliquez ici

6.3 Equivalents de suites récurrentes - 1 (mpsi/pcsi)

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_{n+1} = u_n e^{-n}$, avec $u_0 > 0$ quelconque.

1. Montrer que $(u_n)_n$ converge vers 0.
2. Etudier la suite $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$, et déduire que $u_n \sim \frac{1}{n}$.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

6.4 Equivalents de suites récurrentes - 2 (mpsi/pcsi)

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_{n+1} = \sin u_n$, avec $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ quelconque.

1. Montrer que $(u_n)_n$ converge vers 0.
2. Trouver un équivalent de u_n.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

7 Suites et séries de fonctions

7.1 Transformation d'Abel et convergence uniforme (mp/pc)

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes, et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante de limite nulle. Posons pour tout n, $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$, et supposons que la suite $(A_n)_n$ est bornée par $M \in \mathbb{R}^+$. On définit la transformation d'Abel du terme $\sum_{k=0}^n a_k b_k$ par

$$A_n b_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k(b_{k+1} - b_k).$$

1. Montrer que pour tout n, le terme $\sum_{k=0}^n a_k b_k$ est égal à sa transformation d'Abel.
2. (Critère d'Abel) Montrer que la série $\sum a_k b_k$ converge, et que son reste R_n d'ordre n vérifie $|R_n| \leq 2Mb_n$
3. Vérifier que le critère des séries alternées est un cas particulier de celui d'Abel.
4. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ est une série de fonctions uniformément convergente sur tout intervalle de la forme $[c,d]$ avec $0 < c < d < 2\pi$.

Eléments de solution:

1.
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n a_k b_k &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^n (A_k - A_{k-1}) b_k \\
&= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=1}^n A_{k-1} b_k \\
&= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{q=0}^{n-1} A_q b_{q+1} \\
&= a_0 b_0 - A_0 b_1 + A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1} \\
&= A_0(b_0 - b_1) + A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) \\
&= A_n b_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) = A_n b_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_{k+1} - b_k)
\end{aligned}$$

2. Soit R_n le reste d'ordre n de la série $\sum a_n b_n$. On a
$$R_n = -A_n b_n - \sum_{k=n}^{+\infty} A_k (b_{k+1} - b_k)$$
et il vient pour tout n,
$$\begin{aligned}
|R_n| &\leq |A_n b_n| + \sum_{k=n}^{+\infty} |A_k| . |b_{k+1} - b_k| \\
&\leq |A_n b_n| + M . \sum_{k=n}^{+\infty} (b_k - b_{k+1}) \\
&\leq |A_n b_n| + M . b_n \\
&= 2M\, b_n \qquad \text{(majoration indep. de } x\text{)} \\
&\xrightarrow{n\to\infty} 0
\end{aligned}$$
D'où le résultat annoncé.

3. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive décroissante de limite nulle. Le critère des séries alternées dit que $\sum(-1)^n b_n$ est convergente. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-1)^n$ et $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$. On voit que pour tout n, $A_n = \pm 1$, donc la suite $(A_n)_n$ est bornée, et ce cas n'est alors qu'un cas particulier du critère d'Abel.

4. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \sin nx$, $b_n = \dfrac{1}{n}$ et $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$. D'après l'exercice 2.1, on a pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \,.\, \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Comme $\sin \dfrac{x}{2}$ ne s'annule pas sur le compact $[c,d]$, alors il y a un $\epsilon > 0$ tel que $\forall x \in [c,d], \sin \dfrac{x}{2} \geq \epsilon$, et la suite $(A_n)_n$ est bornée sur $[c,d]$ par $M := \dfrac{1}{\epsilon}$ (borne indépendante de x). D'après le cirtère d'Abel, la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ est simplement convergente. De plus, d'après la question 2, le reste d'ordre n de la série vérifie $|R_n(x)| \leq \dfrac{2M}{n}$. C'est une majoration indépendante de x, et qui est de limite nulle. Ceci montre que la série est uniformément convergente sur le segment $[c,d]$.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

8 Intégration

8.1 La fonction Gamma Γ

Soit Γ la fonction définie par l'intégrale impropre suivante:

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ dt$$

1. Montrer que Γ est définie sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$, et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n+1) = n!$
3. Calculer $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, puis $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Montrer que Γ est continue sur $]0,+\infty[$
5. Montrer que Γ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$, et que
$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty (\ln t)^k t^{x-1}e^{-t}$$
6. Montrer que $\Gamma(x) \sim_{0^+} \frac{1}{x}$.
7. Montrer que Γ est convexe et étudier ses variations.

Eléments de solution:

1. Pour tout $x > 0$, La fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est continue positive sur $]0,+\infty[$. Il est facile de voir qu'au voisinage de 0, $e^{-t}t^{x-1} \sim \frac{1}{t^{x-1}}$, et qu'au voisinage de $+\infty$, $e^{-t}t^{x-1} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. L'intégrale est convergente par comparaison aux fonctions de Riemann.
2. On démontre le résultat voulu en effectuant une intégration par parties. Soit $x > 0$.
$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\ dt \\ &= \Big[t^x(-e^{-t})\Big]_{t=0}^{t=+\infty} - \int_0^\infty x t^{x-1}(-e^{-t}) \\ &= x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t} \\ &= x\,\Gamma(x)\end{aligned}$$
3. On rappelle la valeur de l'intégrale de Gauss: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}$.
$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-t}\,dt \qquad\qquad (t = u^2 \qquad dt = 2u\,du) \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{u}e^{-u^2}\,2u\,du \\ &= 2\int_0^\infty e^{-u^2}\,du \\ &= \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)\\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right)\\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots .1}{2^n}\sqrt{\pi}\\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n}\,n!}\sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

4. Soient a, b deux réels strictement positifs, $a < b$. On applique le théorème de continuité des intégrales à paramètres pour montrer que Γ est continue sur $[a, b]$. Comme a et b sont quelconques, Γ sera alors continue sur $]0, +\infty[$. Posons $f(x, t) := t^{x-1}\, e^{-t}$

   - La fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$
   - La fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$
   - On a $\forall (x, t) \in]a, b[\text{x}]0, +\infty[$

     $$|f(x, t)| \leq t^{a-1}\, e^{-t} + t^{b-1}\, e^{-t} =: g(t)$$

     Ceci car $|t^{x-1}\, e^{-t}| \leq t^{a-1}\, e^{-t}$ si $t \leq 1$ et $|t^{x-1}\, e^{-t}| \leq t^{b-1}\, e^{-t}$ si $t \geq 1$. D'autrepart la fonction g est continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$.

   D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, Γ est continue sur $[a, b]$. Comme a et b sont quelconques, Γ est alors continue sur $]0, +\infty[$.

5. On applique le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres (théorème de Leibniz). Soient $a, b \in]0, +\infty[$ tels que $a < b$. Soit $h(t) := (\ln t)e^{-t}(t^{a-1} + t^{b-1})$. On a :

   - $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$
   - $\dfrac{\partial f(x,t)}{\partial x} = (\ln t)\, t^{x-1} e^{-t}$ existe sur $[a, b]\text{x}]0, +\infty[$.
   - $x \mapsto \dfrac{\partial f(x,t)}{\partial x}$ est continue $[a, b]$
   - $t \mapsto \dfrac{\partial f(x,t)}{\partial x}$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$
   - $\left|\dfrac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right| \leq h(t)$ pour tous $x \in [a, b]$ et $t \in]0, +\infty[$.
   - h est continue par morceaux, et intégrable sur $]0, +\infty[$

   Alors la fonction $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x, t)\, dt$ est dérivable, et

   $$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\, dt = \int_0^{\infty} (\ln t)\, t^{x-1}\, e^{-t}$$

   Le même argument s'applique pour toutes les dérivées successives de Γ. La fonction Γ est de classe C^∞, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

   $$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{\infty} (\ln t)^k\, t^{x-1}\, e^{-t}$$

6. D'après une question précédente, $\forall x \in]0, +\infty[$, $x\Gamma(x) = \Gamma(x + 1)$ et comme la fonction Γ est continue, on a alors

   $$\lim_{x \to 0} x\Gamma(x) = \Gamma(1) = 1$$

   d'où le résultat.

7. Il est clair que $\Gamma'' > 0$, donc Γ' est strictement croissante et Γ est une fonction convexe. Or $\Gamma(1) = \Gamma(2)$ et d'après le théorème de Rolle il existe $c \in]1, 2[$ tel que $\Gamma'(c) = 0$. Comme Γ' est strictement croissante, elle s'annule une seule fois en changeant de signe, et la fonction Γ est strictement décroissante sur $]0, c[$, et strictement croissante sur $]c, +\infty[$, atteignant ainsi en c son minimum absolu.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

8.2 Volume d'une boule en dimension n

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $R \in \mathbb{R}^{+*}$ on désigne par $V_n(R)$ le volume de la boule de $\mathbb{R}^n$ de centre 0 et de rayon R, c.à.d.

$$V_n(R) = \underset{x_1^2+\cdots+x_n^2 \leq R^2}{\int \cdots \int} dx_1 \cdots dx_n$$

Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$V_{2p}(R) = \frac{\pi^p R^{2p}}{p!}$$

Eléments de solution: Dans l'expression de $V_n(R)$, on effectue le changement de variables $x_i = Ry_i$. Le jacobien de la transformation est R^n, et on a

$$V_n(R) = R^n V_n(1)$$

$$\begin{aligned}
V_n(1) &= \int_{-1}^{1} \left(\underset{x_1^2+\cdots+x_n^2 \leq 1-x_n^2}{\int \cdots \int} dx_1 \cdots dx_{n-1} \right) dx_n \\
&= \int_{-1}^{1} V_{n-1}(\sqrt{1-x_n^2})\, dx_n \\
&= \int_{-1}^{1} (\sqrt{1-x^2})^{n-1} V_{n-1}(1)\, dx \\
&= V_{n-1}(1) \int_{-1}^{1} (\sqrt{1-x^2})^{n-1}\, dx \\
&= 2V_{n-1}(1) \int_{0}^{1} (\sqrt{1-x^2})^{n-1}\, dx \\
&= 2V_{n-1}(1) \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n u\, du \\
&= 2W_n V_{n-1}(1) \qquad\qquad (W_n : \text{int de Wallis}) \\
&= 2^{n-1} W_n W_{n-1} \cdots W_2 V_1(1) \\
&= 2^n W_n W_{n-1} \cdots W_1 \qquad\qquad \text{car } W_1 = 1
\end{aligned}$$

Or pour tout k, $W_k W_{k-1} = \dfrac{\pi}{2k}$, donc $V_{2p}(1) = \dfrac{\pi^p}{p!}$, et le résultat en découle.

9 Espaces vectoriels et endomorphismes

9.1 Produit commutatif d'endomorphismes nilpotents (mpsi/pcsi)

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n et $u_1, \cdots, u_n$ des endomorphismes nilpotents de E qui commutent deux à deux. Que vaut $u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_n$?

Solution sur YouTube: Cliquez ici

9.2 Exercice: Noyaux et Images Itérés (mpsi/pcsi)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps $\mathbb{K}$, et $f \in \mathcal{E}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $N_k = \ker(f^k)$ et $I_k = \mathrm{Im}(f^k)$. Soit $n_k = \dim(N_k)$ et $r_k = \dim(I_k)$

1. Montrer que la suite $(n_k)_k$ est croissante stationnaire, et la suite $(r_k)_k$ est décroissante stationnaire.
2. Montrer que la suite $(n_{k+1} - n_k)_k$ est décroissante, et la suite de $(r_{k+1} - r_k)_k$ est croissante.
3. Montrer que $n_k \leq k\, n_1$ et $r_k \geq k\, r_1 - n(k-1)$
4. A partir de cette question on suppose que l'endomorphisme f est nilpotent d'indice p. Montrer que $p \leq n$, et que $f^n = 0$.
5. Supposons de plus que $n_1 = 1$. Montrer que f est cyclique, c.à.d qu'il existe $a \in E$ tel que $\big(a, f(a), \cdots, f^{n-1}(a)\big)$ est une base de E.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

10 Matrices

10.1 Une matrice à diagonale dominante est inversible (mpsi/pcsi)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice à diagonale dominante, c'est-à-dire que pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, on a $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$. Montrer que la matrice A est inversible.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

10.2 Calcul de l'inverse d'une matrice (mpsi/pcsi)

Calculer l'inverse de la matrice $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \cdots & \binom{n-1}{0} & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \cdots & \cdots & \binom{n}{1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} & \cdots & \cdots & \binom{n}{2} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

Eléments de solution: Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $f(P(X)) = P(X+1)$. A est la matrice de f dans la base canonique. Donc A^{-1} est la matrice de f^{-1} dans la base canonique. Or $f^{-1}(P(X)) = P(X-1)$, donc $A^{-1} = (b_{ij})_{0 \leq i,j \leq n}$ où $b_{ij} = (-1)^{j-i}\binom{j}{i}$ si $i \leq j$ et $b_{ij} = 0$ si $i > j$.

11 Déterminants

11.1 Problème du berger (mpsi/pcsi)

Un berger possède 101 moutons. Il se rend compte un jour que lorsqu'il isole n'importe lequel de ses mouton du reste du troupeau, il peut toujours trouver une façon pour séparer les 100 moutons restants en deux groupes de 50 de même poids total. Montrer les moutons ont tous le même poids.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

11.2 Calcul d'un déterminant par récurrence (mpsi/pcsi)

Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit le déterminant D_n par

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a \end{vmatrix}$$

1. Trouver une relation de récurrence vérifiée par D_n.
2. Calculer D_n.

Eléments de solution: En développant le déterminant selon la première ligne, on constate que $D_n = aD_{n-1} - D_{n-2}$. C'est une équation aux différences dont les solutions sont de la forme $\alpha r^n + \beta s^n$ si $x^2 - ax + 1$ admet deux solutions distinctes r et s, ou de la forme $\alpha r^n + \beta n r^n$ si $x^2 - ax + 1$ admet une solution unique r. Les coefficients α et β sont obtenus en calculant D_1 et D_2.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

11.3 Déterminant de Hürwitz (mpsi/pcsi)

Calculer le déterminant de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la forme

$$A = \begin{pmatrix} r_1 & a & \cdots & a \\ b & r_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & r_n \end{pmatrix}$$

Eléments de solution: Ajouter une indéterminée X aux coefficients de la matrice. Le déterminant de la nouvelle matrice est une fonction $f(X)$ de X, qu'on montre affine en X, et alors de la forme $\alpha X + \beta$. On peut facilement calculer $f(-a)$ et $f(-b)$, on utilise ces valeurs pour trouver α et β (deux équations à deux inconnues). Le déterminant cherché n'est autre que $f(0)$, ou β.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

11.4 Déterminants de Vandermonde (mpsi/pcsi)

Soient $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant de la matrice de Vandermonde associée

$$V(a_1, \cdots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & {a_1}^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & {a_2}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & {a_n}^{n-1} \end{vmatrix}$$

Eléments de solution: Remplacer la constante a_n par une variable x. Le déterminant est alors une fonction $f(x)$ de la variable x, et en développant selon la dernière colonne, on constate que $f(x)$ est polynomiale de degré $n-1$ en x. Or cette fonction s'annulle si x est l'un des a_i pour $i < n$, donc $f(x)$ est de la forme $Cte. \prod_{i=1}^{n-1}(x - a_i)$. La constante est le coefficient de x^{n-1}, c'est alors $V(a_1, \cdots, a_{n-1})$. Par récurrence, a que

$$V(a_1, \cdots, a_n) = f(a_n) = \prod_{j>i}(a_j - a_i).$$

Solution sur YouTube: Cliquez ici

11.5 Déterminant de Cauchy (mpsi/pcsi)

Soient $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$ des nombres complexes tels que pour tous i et j, $a_i + b_j \neq 0$. Montrer que

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} = \frac{\prod\limits_{1\leq i<j\leq n}(a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod\limits_{1\leq i,j\leq n}(a_i + b_j)}$$

Eléments de solution: Similairement aux déterminants de Vandermonde et Hürwitz, on constate que ce déterminant aurait été facile à calculer si certains coefficients prennent certaines valeurs. En l'occurence, si a_n est égal à l'un des a_i, alors le déterminant est nul car il a deux lignes identiques. Pour tirer profit de ce fait, on remplace a_n par une indeterminée x, le déterminant est alors une fonction $f(x)$ qu'on étudie pour trouver l'expression recherchée.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

11.6 Déterminant de Gram (mpsi/pcsi)

Soit E un espace Euclidien de dimension n, F un sous-espace vectoriel de E de dimension $q < n$, et $(u_1, \cdots, u_q)$ une base de F. Si $v_1, \cdots, v_m \in E$, on considère la matrice:

$$G(v_1, \cdots, v_m) = \Big((v_i|v_j) \Big)_{i,j}$$

1. Soit $x \in E \setminus F$, on désigne par $p(x)$ le projeté orthogonal de x sur F. Montrer que
$$\det G(u_1, \cdots, u_q, x) = \det G(u_1, \cdots, u_q, p(x)) + \\ ||x - p(x)||^2 \det G(u_1, \cdots, u_q).$$
2. Montrer que
$$d(x, F) = \sqrt{\frac{\det G(u_1, \cdots, u_q, x)}{\det G(u_1, \cdots, u_q)}}$$
3. Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = z + t = 0\}$. Déterminer l'expression de la distance d'un élement de $\mathbb{R}^4$ à F.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

11.7 Déterminants circulants (mp/pc)

Soit $n \geq 2$ un entier et $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant circulant

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$$

et donner la forme factorisée de Δ_4.

Indication: diagonaliser la matrice $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Eléments de solution: On diagonalise J, et on écrit la matrice initiale comme un polynome en J, et ceci nous fournit alors une diagonalisation de cette matrice. Le déterminant est obtenu alors en effectuant le produit des valeurs propres.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

11.8 Matrice circulante modulo p (mp/pc)

Soit p premier et $(a_0, a_1, \cdots, a_{p-1}) \in \mathbb{Z}^p$. Montrer que

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{p-1} \\ a_{p-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{p-2} \\ a_{p-2} & a_{p-1} & a_0 & \cdots & a_{p-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{vmatrix} \equiv a_0 + a_1 + \cdots + a_{p-1} \quad [p].$$

Solution sur YouTube: Cliquez ici

12 Groupes

12.1 Ordre d'un groupe et cyclicité (mp)

1. Soit G un groupe abélien et x, y deux élements de G d'ordres respectifs m et n, où m, n sont deux entiers premiers entre eux. Monter que l'ordre de xy est mn.
2. Soient p, q deux nombres premiers distincts, et G un groupe abélien d'ordre pq. Montrer que G est cyclique.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

12.2 Existence d'élements primitifs (mp)

1. Soit G un groupe abélien fini. Montrer qu'il existe un élément de G dont l'ordre est le PPCM des ordres de tous les éléments de G.
2. Soit K un corps (commutatif) fini. Montrer que le groupe multiplicatif de K est cyclique.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

12.3 Groupes de Prüfer: le groupe p-quasi-cyclique (mp)

Soit p un nombre premier. On pose $G_p = \{z \in \mathbb{C}, \exists k \in \mathbb{N} : z^{p^k} = 1\}$.

1. Montrer que G_p est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, .)$
2. Décrire G_p à l'aide des groupes cycliques $\mathcal{U}_{p^k}$ des racines p^k-ièmes de l'unité.
3. Montrer tout sous-groupe strict de G_p est l'un des $\mathcal{U}_{p^k}$.
4. Montrer que G_p n'est pas de type fini, c.à.d G_p ne possède pas une partie génératrice finie.

Eléments de solution:

1. Clairement $1 \in G_p$. Si $x, y \in G_p$, soient $k, l \in \mathbb{N}$ tels que $x^{p^k} = y^{p^l} = 1$, et soit $m = max\{k, l\}$. Alors
$$(x.y^{-1})^{p^m} = \frac{x^{p^m}}{y^{p^m}} = \frac{(x^{p^k})^{p^{m-k}}}{(y^{p^l})^{p^{m-l}}} = \frac{1^{p^{m-k}}}{1^{p^{m-l}}} = 1,$$
et alors $x.y^{-1} \in G_p$ montrant ainsi que G_p est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, .)$.
2. $G_p = \{z \in \mathbb{C}, \exists k \in \mathbb{N} : z^{p^k} = 1\} = \{z \in \mathbb{C}, \exists k \in \mathbb{N} : z \in \mathcal{U}_{p^k}\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_{p^k}$.
3. Soit H un sous-groupe strict de G_p, et soit $a = \sup\{\text{ordre}(z), z \in H\}$, $a \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.

   $\underline{a \neq +\infty}$: Sinon, il existe des entiers naturels n arbitrairement grands et des éléments $z_n \in H$ tels que ordre$(z_n) = p^n$. Or le sous-groupe $gr(z_n)$ engendré par un tel z_n a p^n éléments, et tous ses éléments on un ordre diviseur de p^n. Donc $gr(z_n) = \mathcal{U}_{p^n}$, et comme les $\mathcal{U}_{p^n}$ forment une suite croissante de sous-groupes, alors
$$G_p = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_{p^k} = \bigcup_{n} gr(z_n) \subset H$$

ce qui contredit le fait que H est un sous-groupe strict de G_p.

On en conclut alors que $a \in \mathbb{N}^*$, et c'est un élément de la forme p^m pour un certain $m \in \mathbb{N}$. Soit $z \in H$ tel que ordre$(z) = a$. Si z' est un autre élément de H d'ordre $p^{m'}$, alors par maximalité de a, on a $p^{m'} \leq a = p^m$, donc aussi $m' \leq m$ et $p^{m'}|a$. Tout élément de H est alors racine a-ième de 1, et $H = \mathcal{U}_{p^m}$, d'où le résultat annoncé.

4. Soit A une partie finie de G_p. Chaque élément $u \in A$ appartient à un certain $\mathcal{U}_{n_u}$. Soit $n = \max\{n_u, u \in A\}$. Par la croissance des $(\mathcal{U}_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $A \subset \mathcal{U}_n$, et $gr(A) \subset \mathcal{U}_n \neq G_p$. Toute partie finie de G_p n'engendre donc pas G_p, et G_p n'est pas de type fini.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

12.4 Un groupe fini dont les éléments sont d'ordre 1 ou 2 (mp)

Soit G un groupe fini tel que pour tout $x \in G$, $x^2 = e$.

1. Montrer que G est abélien.
2. Soit H un sous-groupe strict de G et $x \in G \setminus H$. Trouver le sous-groupe de G engendré par H et x.
3. Que pouvez vous dire de la cardinalité de G?

Eléments de solution:

1. Découle du fait que $\forall x, y \in G, (x.y)^2 = x.y$.
2. $gr(H \cup \{x\}) = H \cup H.x$.
3. La cardinalité de G est un entier de la forme 2^n.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

12.5 Théorème de Sylow pour un groupe abélien (mp)

Soit G un groupe abélien fini et p un nombre premier.

1. Soit H un sous-groupe de G. On suppose que G/H a un élément d'ordre p. Montrer que G a un élément d'ordre p.
2. (Lemme de Cauchy) Montrer que si p divise $|G|$, alors G a un sous-groupe d'ordre p.
3. Montrer que si $a \in \mathbb{N}$ et p^a divise $|G|$, alors G a un sous-groupe d'ordre p^a.
4. (Réciproque du théorème de Lagrange) Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$ et n divise $|G|$, alors G a un sous-groupe d'ordre n.

Eléments de solution:

13 Anneaux

13.1 Somme des entiers plus petits que m et premiers avec m (mp)

Soit $m \geq 2$ un entier. Calculer la somme S_m de tous les entiers naturels plus petits que m et premiers avec m.

Eléments de solution: Soient $a_1, \cdots, a_{\varphi(m)}$ les entiers plus petits que m et premiers avec m. Si $1 \leq a < m$ et $a \wedge m = 1$, alors $1 \leq m - a < m$ et $(m-a) \wedge m = 1$. On a alors

$$S_m = a_1 \quad + \quad \cdots \quad + \quad a_k \quad + \quad \cdots + a_{\varphi(m)}$$

et

$$S_m = (m - a_1) + \cdots + (m - a_k) + \cdots + (m - a_{\varphi(m)}).$$

D'où $2S_m = m\varphi(m)$ et $S_m = \dfrac{m\varphi(m)}{2}$.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

13.2 Théorème des restes Chinois (mp)

1. Soient m, n deux entiers premiers entre eux, et a, b deux entiers quelconques. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{Z}$ tel que $x \equiv a\ [m]$ et $x \equiv b\ [n]$. Quels sont les autres $x' \in \mathbb{Z}$ qui ont cette propriété?
2. Déduire que les anneaux $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont isomorphes.
3. Le général Han Xin a entre 900 et 1000 soldats. Si on les range par 3, il en reste 2. Si on les range par 5, il en reste 3 et si on les range par 7, il en reste 2. Combien sont-ils ?
4. Trouver explicitement un isomorphisme de $h : \mathbb{Z}/105\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, ainsi que son inverse h^{-1}.

Eléments de solution:

1. Soient $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $um + vn = 1$. On a clairement que $um \equiv 1\ [n]$, $um \equiv 0\ [m]$, $vn \equiv 0\ [n]$ et $vn \equiv 1\ [m]$. Donc si on prend $x = bum + avn$, on voit que x a la propriété voulue. Si x' a cette propriété, alors $x - x'$ est divisible à la fois par m et par n. Or $m \wedge n = 1$, donc $x - x'$ est divisible par mn, c.à.d x' est de la forme $x + kmn$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Réciproquement, on voit que si x' est de la forme $x + kmn$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$, alors x' a la propriété voulue.
2. On considère l'endomorphisme $\bar{x}^{mn} \mapsto (\bar{x}^m, \bar{x}^n)$. D'après la question précédente, cet endomorphisme est surjectif. Or les ensembles de départ et d'arrivée sont de même cardinalité finie, donc c'est un isomorphisme.
3. On doit trouver un entier x compris entre 900 et 1000, vérifiant $x \equiv 2\ [3]$, $x \equiv 3\ [5]$ et $x \equiv 2\ [7]$. Comme $(2.3) + (-5) = 1$, la méthode donnée à la première question donne que $8 = 2.(-5) + 3.(2.3)$ est à la fois congru à 2 modulo 3 et à 3 modulo 5. Donc dire que x vérifie les deux premières congruences revient à dire que $x \equiv 8\ [15]$. Reste alors à trouver les entiers x vérifiant les deux congruences: $x \equiv 8\ [15]$ et $x \equiv 2\ [7]$. On a $15 + (-2.7) = 1$, donc $-82 = 8(-2.7) + 2.15$ est solution des trois congruences initiales. Les autres solutions sont les entiers de la forme $-82 + 105k, k \in \mathbb{Z}$. Le seul parmi ces entiers qui tombe entre 900 et 1000 est $-82 + 105.10 = 968$.
4. Un calcul comme celui de la question précédente donne que si $h^{-1}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \overline{70a - 84b + 15c}$.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

13.3 Un morphisme surjectif de groupes - théorème des restes chinois (mp)

Soit $m \geq 2$ un entier, et $d \geq 2$ un diviseur de m. Définir un morphisme de groupes surjectif $h : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \longrightarrow (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^*$.

Eléments de solution: On pose $h(\bar{x}^m) = \bar{x}^d$. C'est une application bien définie car si $\bar{x}^m = \bar{y}^m$, alors $m|x-y$, or $d|m$, donc $d|x-y$ et $\bar{x}^d = \bar{y}^d$. De plus, si $\bar{x}^m$ est inversible, alors x est premier avec m et comme $d|m$, alors x est premier avec d et $\bar{x}^d$ est inversible. Montrons que h est surjectif.

13.4 Théorème de Wilson (mp)

1. Monter qu'un entier p est premier si et seulement si $(p-1)! \equiv -1\ [p]$.
2. Soit p un nombre premier de la forme $4n+1$. Montrer que $-1 \equiv (2n)!^2\ [p]$.

Eléments de solution:

1.
   - $\boxed{\Rightarrow}$ Si p est premier, alors Z/pZ est un corps dont les seuls éléments non nuls égaux à leurs propres inverses sont les classes de 1 et $p-1$. Donc modulo p, les facteur du produit $(p-1)!$ vont se simplifier avec leurs inverses respectifs, et il vient alors
   $$(p-1)! \equiv 1.(p-1) \equiv -1 \qquad [p].$$
   - $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $(p-1)! \equiv -1\ [p]$, donc $(p-1)!+1 = k.p$ pour un certain entier k. Tout entier naturel $< p$ divise $(p-1)!$, donc est premier avec p. Il en suit immédiatement que p est premier.
2. Suit par la première question et le fait que $\{k-p, k \in [|2n+1, 4n|]\} = [|-2n, -1|]$.

   Solution sur YouTube: Cliquez ici

13.5 Critère d'Eisenstein et applications (mp)

1. Soit $P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$. Supposons qu'il existe un nombre premier p tel que p divise tous les a_k pour $k \neq n$, p ne divise pas a_n, et p^2 ne divise pas a_0. Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.
2. Soit p un nombre premier. Montrer que le polynôme
$$\Phi_p(X) := \frac{X^p - 1}{X-1} = X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1$$
est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Eléments de solution:

1. Supposons pour une contradiction que P est de la forme $Q.R$ avec $q := \deg(Q) \geq 1$ et $r := \deg(R) \geq 1$. Soient $\overline{P}$, $\overline{Q}$ et $\overline{R}$ les réduits modulo p de P, Q et R respectivement. D'après l'hypothèse, $\overline{P}$ est un monôme non nul, $\overline{P} = \overline{a_n}X^n$. Comme p est premier alors $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps, et d'après l'unicité de la décomposition en polynômes irréductibles dans $\mathbb{Z}/pZ[X]$, on a successivement $\overline{Q}$ et $\overline{R}$ sont de la forme $\overline{\alpha}X^q$ et $\overline{\beta}X^r$, les termes constants de Q et R sont divisibles par p, et enfin a_0 est divisible par p^2. Contradiction.
2. L'endomorphisme de $\mathbb{Z}[X]$ qui envoie $P(X)$ à $P(X+1)$ étant un automorphisme, il suffit alors de montrer que $\Phi(X+1)$ est irréductible. Or
$$\Phi(X+1) = \frac{(X+1)^p - 1}{(X+1)-1} = X^{p-1} + \binom{p}{p-1}X^{p-2} + \binom{p}{p-2}X^{p-3} + \cdots + \binom{p}{2}X + p.$$

Comme p est premier, on sait que p divise tous les $\binom{p}{k}$ pour $1 \leq k \leq p-1$, et le critère d'Eisenstein donne le résultat voulu.

13.6 L'anneau $\mathbb{Z}[X]$ n'est pas principal (mp)

1. L'anneau $\mathbb{Z}[X]$ est-il principal ?
2. Soit A un anneau commutatif. A quelle condition $A[X]$ est-il principal?

Eléments de solution:

1. Soit I l'idéal engendré par 2 et X. On va montrer que I n'est pas principal et conclure ainsi que $\mathbb{Z}[X]$ n'est pas principal. En effet, si $I = (P)$ pour un certain $P \in \mathbb{Z}[X]$, on a alors $2 = Q.P$ et $X = R.P$ pour certains $Q, R \in \mathbb{Z}[X]$. De la première égalité on déduit que Q et P sont constants diviseurs de 2, et en évaluant la deuxième en 1 on a que $P = \pm 1$. Donc $I = \mathbb{Z}[X]$. et il existe alors deux polynômes A et B de $\mathbb{Z}[X]$ tels que $1 = 2A + XB$. En évaluant en $X = 0$ on a que 2 divise 1 dans $\mathbb{Z}$, contradiction.
2. Il faut et il suffit que A soit un corps. Dans un premier sens on sait que si A est un corps alors $A[X]$ est un anneau euclidien donc principal. Dans l'autre sens, supponsons que A n'est pas un corps, et soit $a \in A \setminus \{0\}$ non inversible. Comme dans la première question, on montre que l'idéal de A engendré par X et a n'est pas principal.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

13.7 Idéaux maximaux (mp)

Soit A un anneau commutatif. Un idéal strict I de A est dit maximal si et seulement si il est maximal pour l'inclusion parmi les idéaux stricts de A.

1. Montrer que I est maximal si et seulement si A/I est un corps.
2. Monter que tout idéal maximal est premier.
3. Trouver les idéaux maximaux de $\mathbb{Z}$.
4. Montrer que $< X^2 + 1 >$ est un idéal premier non maximal de $\mathbb{Z}[X]$.

Eléments de solution:

1. $\boxed{\Rightarrow}$ Soit $\bar{a} \in A/I$, $\bar{a} \neq \bar{0}$. Alors $a \notin I$ et ainsi $I \subsetneq I + A.a$. Comme I est maximal, alors $I + A.a = A$. Soit alors $x \in I$ et $\alpha \in A$ tels que $x + \alpha.a = 1$. En passant au quotient on a $\bar{\alpha}.\bar{a} = \bar{1}$, et $\bar{a}$ est inversible dans A/I.

   $\boxed{\Leftarrow}$ Soit J un idéal de A contenant strictement I. Montrons que $J = A$. Soit $a \in J \setminus I$. Alors dans A/I, $\bar{a} \neq \bar{0}$ et est donc inversible. Soit $\alpha \in A$ tel que $\bar{\alpha}.\bar{a} = \bar{1}$. On a alors $\alpha.a - 1$ est un certain élément x de I, et $1 = \alpha.a - x \in J$. D'où le résultat voulu.
2. Un idéal I est premier si et seulement si A/I est un anneau intègre. Un idéal I est maximal si et seulement si A/I est un corps. Comme tout corps est un anneau intègre, alors tout idéal maximal est premier.
3. Ce sont les $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier.
4. Soit $\varphi : \mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{C}$, défini par $\varphi(P) = P(i)$. On voit clairement que

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{Z}[i] \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ker}(\varphi) =< X^2 + 1 >$$

Donc $\mathbb{Z}[X]/ < X^2+1 >$ est isomorphe à $\mathbb{Z}[i]$, et comme $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau intègre qui n'est pas un corps, alors il en est de même pour $\mathbb{Z}[X]/ < X^2+1 >$. Ainsi $< X^2+1 >$ est un idéal premier non maximal.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

13.8 Anneau sans idéal non premier (mp)

Soit A un anneau commutatif dont tout idéal I est premier c'est-à-dire vérifie, pour tout $(x, y) \in A^2$,

$$xy \in I \Longrightarrow x \in I \quad \text{ou} \quad y \in I.$$

Montrer que A est un corps.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

13.9 Valuations sur $\mathbb{Q}$ (mp)

On appelle valuation sur un anneau A toute application ν de A dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que, pour tout $(x, y) \in A^2$:

- $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$
- $\nu(x+y) \geq \min(\nu(x), \nu(y))$
- $\nu(x) = +\infty \Longleftrightarrow x = 0$

1. Donner des exemples de valuations sur $\mathbb{Z}$, sur $\mathbb{Q}$.
2. Déterminer toutes les valuations sur $\mathbb{Q}$.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

14 Réduction

14.1 Disques de Gershgorin et théorème de Hadamard (mp/pc)

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice carrée de taille n. Pour tout entier k entre 1 et n, on appelle k^{eme} disque de Gershgorin de A la boule fermée de $\mathbb{C}$ de centre a_{kk} et de rayon $\sum_{i\neq k} |a_{ki}|$:

$$D_k = B'(a_{kk}, \sum_{i\neq k} |a_{ki}|).$$

Montrer que le spectre de A est inclus dans la réunion des D_k.

(b) On dit qu'une matrice $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est à diagonale dominante si pour tout k,

$$|a_{kk}| > \sum_{i\neq k} |a_{ki}|.$$

Montrer qu'un matrice à diagonale dominante est inversible.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

14.2 Le polynôme charactéristique d'un produit: $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ (mp/pc)

Soient A, B deux matrices carrées de taille n et à coefficients réels ou complexes. Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

Eléments de solution: Si A est inversible, alors AB et BA sont semblables donc ont même polynôme caractéristique. Pour le cas général on peut faire un argument de densité, ou on peut utiliser l'argument suivant qui a l'avantage d'établir le résultat lorsque le corps de base est quelconque.

Soit r le rang de A, I la matrice identité de taille r, et P, Q inversibles de taille n telles que

$$A = P \begin{pmatrix} I & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix} Q$$

Soient B_{11}, B_{12}, B_{21} et B_{22} les matrices de taille respectives $(r, r), (r, n - r), (n - r, r)$ et $(n - r, n - r)$ telles que

$$B = Q^{-1}. \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} .P^{-1}$$

On a:

$$A.B = P. \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .P^{-1} \qquad \text{et} \qquad B.A = Q^{-1}. \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix} .Q$$

Donc $\chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x) = (-x)^{n-r}\chi_{B_{11}}(x)$

Solution sur YouTube: Cliquez ici

14.3 Condition pour la similitude de deux matrices (mp/pc)

Déterminer l'ensemble des $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels qu'il existe $(A, B) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2$ avec:

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad BA = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -3 & b \end{pmatrix}$$

(Indication: On peut commencer par démontrer que deux matrices inversibles U et V sont semblables si et seulement si on peut trouver deux matrices A, B de $GL_n(\mathbb{C})$ telles que $A.B = U$ et $B.A = V$.)

Solution sur YouTube: Cliquez ici

14.4 Similitude sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$? (mp/pc)

(a) Soient A, B deux matrices réelles carrées de taille n. Montrer que les matrices A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si et seulement si elles le sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que χ_A soit scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si et seulement si elle l'est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

14.5 Lorsqu'un polynôme en u est un isomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P(u)$ est un isomorphisme de E si et seulement si P est premier avec le polynôme minimal de u.

Eléments de solution: Soit P_0 le polynôme minimal de u, $D = P \wedge P_0$ et $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P = A.D$ et $P_0 = B.D$. Soient $M, N \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$MP + NP_0 = D \qquad (*)$$

- Supposons que $D = 1$. D'après $(*)$ et le fait que $P_0(u) = 0$, on a $M(u) \circ P(u) = id_E$, donc $P(u)$ est inversible dans $\mathcal{L}(E)$ et d'inverse $M(u)$.
- Supposons que $D \neq 1$. Alors $deg(B) < deg(P_0)$, et par la minimalité de P_0, on a alors $B(u) \neq 0$. Il en suit que dans l'anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$, $D(u)$ est un diviseur de 0 donc non inversible. Comme $P(u) = A(u) \circ D(u)$, alors $P(u)$ n'est pas inversible.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

14.6 Un endomorphisme nilpotent (mp/pc)

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $\alpha \in \mathbb{C}^*$, et f, g des endomorphismes de E tels que:

$$f \circ g - g \circ f = \alpha f \qquad \text{et} \qquad g \text{ est diagonalisable.}$$

(a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n: $f^n \circ g - g \circ f^n = n\alpha f^n$

(b) En déduire que f est nilpotent.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

14.7 Matrices stochastiques (mp/pc)

Une matrice carrée réelle à coefficients positifs est dite *stochastique* (ou encore *matrice de Markov*) si la somme des éléments de chaque ligne vaut 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et S l'ensemble des matrices stochastiques de taille n.

1. Montrer que tous les éléments de S ont une valeur propre commune.
2. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est encore une matrice stochastique.
3. Soit $M \in S$ et λ une valeur propre complexe de M. Montrer que $|\lambda| \leq 1$.
4. Montrer que S est convexe et compact.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

14.8 Matrices compagnon et théorème de Cayley-Hamilton (mp/pc)

Soit $Q(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$. La matrice compagnon A_Q de Q est définie par:

$$A_Q = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

1. Montrer que le polynôme caractéristique de A_Q est $(-1)^n Q$.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ et χ_f son polynôme caractéristique. Soit $x \in E$.

2. Démontrer qu'il existe un plus petit entier $p > 0$ tel que la famille $(x, f(x), \cdots, f^p(x))$ soit liée.
3. Soit $F = \text{Vect}(x, f(x), \cdots, f^{p-1}(x))$. Démontrer que F est stable par f, et que $\mathcal{B} := (x, f(x), \cdots, f^{p-1}(x))$ en est une base.
4. Soit $g := f|F$ et χ_g le polynôme caractéristique de g. Montrer que $\chi_g(g)(x) = 0$.
5. Déduire que $\chi_f(f) = 0$

Solution sur YouTube: Cliquez ici

14.9 Diagonalisation simultanée (mp/pc)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soient $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables et commutant deux à deux. Montrer que les f_i admettent une base commune de diagonalisation.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

14.10 Un sous-espace stable de dimension 1 ou 2 (mp/pc)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n > 0$ tel que $P(u)$ ne soit pas injectif. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel non trivial de E de dimension $\leq n$ qui est stable par u.
2. Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et E est de dimension finie, alors il existe un sous-espace vectoriel de E de dimension 1 ou 2 stable par u.

Eléments de solution:

1. Sans perte de généralité, on peut supposer que P est unitaire, de la forme

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Soit $x \in \ker P(u) \setminus \{0\}$, $\mathcal{F}$ la famille $(x, u(x), \cdots, u^{n-1}(x))$ et $F = \text{vect}(\mathcal{F})$. On a $\dim(F) \leq n$ car $\text{card}(\mathcal{F}) \leq n$, et $F \neq \{0\}$ car $x \neq 0$. D'autre part, comme $P(u)(x) = 0$, alors

$$u^n(x) = -a_{n-1}u^{n-1}(x) - \cdots - a_0 x \in F,$$

et on voit facilement que F est stable par u.

2. Comme $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors χ_u est le produit de polynômes réels P_i de degré 1 ou 2. Si tous les $P_i(u)$ sont injectifs, alors leur composée $\chi_u(u)$ le serait également. Ceci contredirait le théorème de Cayley-Hamilton qui dit que $\chi_u(u) = 0$. Donc au moins l'un des $P_i(u)$ n'est pas injectif, et le résultat voulu découle de la question précédente.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

14.11 Valeurs propres deux à deux distinctes(mp/pc)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes.

1. Il existe $x \in E$ tel que $\left(x, u(x), \cdots, u^{n-1}(x)\right)$ est une base de E.
2. u admet n valeurs propres deux à deux distinctes.

Eléments de solution:

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u associés au valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ respectivement. Soit $x \in E$ tel que $\left(x, u(x), \cdots, u^{n-1}(x)\right)$ est une base $\mathcal{B}'$ de E. On écrit x dans la base $(e_1, \cdots, e_n)$, $x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$. On voit que pour tout $k \in [|0, n-1|]$,

$$u^k(x) = \alpha_1 \lambda_1^k e_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^k e_n.$$

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est alors donnée par

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1\lambda_1 & \cdots & \alpha_1\lambda_1^{n-1} \\ \alpha_2 & \alpha_2\lambda_2 & \cdots & \alpha_2\lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_n\lambda_n & \cdots & \alpha_n\lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Ainsi:

$$\det(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}) = \left(\prod_{i=1}^n \alpha_i\right) . \det\left(V(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)\right) = \left(\prod_{i=1}^n \alpha_i\right) . \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j)$$

où $V(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ est la matrice de Vandermonde associée aux valeurs $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Or le déterminant d'une matrice de passage est non nul, donc

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$$

et les valeurs propres λ_i sont deux à deux distinctes.

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$ Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u, associés aux valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Posons

$$x = e_1 + \cdots + e_n.$$

Pour tout $k \in [|0, n-1|]$,

$$u^k(x) = \lambda_1^k e_1 + \cdots + \lambda_n^k e_n.$$

Ainsi

$$\det(x, u(x), \cdots, u^{n-1}(x)) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0,$$

et $(x, u(x), \cdots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

14.12 Matrices de Clément (Kac): diagonaliser un opérateur de dérivation (mp/pc)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice définie par

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Trouver un endomorphisme simple f de $\mathbb{R}_n[x]$ dont la matrice dans la base canonique est A_{n+1}.
2. Monter que $\mathrm{sp}(A_n) = \{-n + 2k, k \in |[0, n]|\}$, et en déduire que que A_n est diagonalisable.
3. Montrer que le sous-espace propre associé à n est vect $\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ avec $p_k = \binom{n}{k}$.

Eléments de solution:

1. Pour cet endomorphisme f on a

$$\forall k \in |[0, n]|, f(x^k) = kx^{k-1} + (n-k)x^{k+1} = (1 - x^2)(x^k)' + nx.x^k.$$

On a alors

$$\forall P \in \mathbb{R}[x], f(P) = (1 - x^2)P' + nxP$$

2. Soit λ une valeur propre de f, et P_λ un vecteur propre associé. Alors P_λ est solution de l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y' + (nx - \lambda)y = 0$$

Cherchons le solutions y d'une telle équation sur $]-1, 1[$:

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= \frac{\lambda - nx}{1 - x^2} \\ &= \frac{\lambda - nx}{(1-x)(1+x)} \\ &= \frac{\frac{\lambda - n}{2}}{1 - x} + \frac{\frac{\lambda + n}{2}}{1 + x} \end{aligned}$$

donc

$$\ln|y| = -\frac{\lambda - n}{2}\ln(1 - x) + \frac{\lambda + n}{2}\ln(1 + x) + C' = \ln\left((1 - x)^{\frac{-\lambda + n}{2}}(1 + x)^{\frac{\lambda + n}{2}}\right) + C'$$

et
$$y = C(1-x)^{\frac{-\lambda+n}{2}}(1+x)^{\frac{\lambda+n}{2}}$$
où C, C' sont des constantes. Une solution y est polynômiale lorsque $\dfrac{-\lambda+n}{2}$ et $\dfrac{\lambda+n}{2}$ sont des entiers naturels, c.à.d λ est un entier compris entre $-n$ et n et qui a la même parité que n donc de la forme $-n+2k$ avec $k \in |[0, n]|$.Si n est pair on a alors
$$\operatorname{sp}(A_n) = \{-n, -n+2, \cdots, -2, 0, 2, \cdots, n-2, n\}$$
et si n est impair,
$$\operatorname{sp}(A_n) = \{-n, -n+2, \cdots, -1, 1, \cdots, n-2, n\}$$
La matrice A_n est une matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ et elle a $n+1$ valeurs propres deux-à-deux distinctes, donc A_n est diagonalisable.

3. Un vecteur propre de f pour la valeur propre $\lambda = n$ est donné par
$$(1+x)^{\frac{n+n}{2}} = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$
d'où le résultat voulu.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

14.13 Etude spectrale d'une matrice avec un opérateur de dérivation (mp/pc)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, et $A_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ la matrice définie par
$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Pour tout $k \in [|0, n|]$, soit $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f_k(x) = \cos^k(x)\sin^{n-k}(x)$, et soit V_n le sous-espace de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ engendré par les f_k.

1. Montrer que $\dim V_n = n+1$.
2. Montrer que la dérivation définit un endomorphisme sur V_n, et donner la matrice de cet endomorphisme dans la base $(f_k)_{k=0,\cdots,n}$
3. Pour tout $k \in [|0, n|]$, soit $g_k : x \mapsto e^{i(2k-n)x}$. Montrer que $g_k \in V_n$. Remarquer d'abord que
$$g_k(x) = (\cos x + i \sin x)^k (\cos x - i \sin x)^{n-k}.$$
4. Montrer que A_n est diagonalisable, et calculer ses valeurs propres.
5. Pour quelles valeurs de n la matrice A_n est-elle inversible?

Eléments de solution:

14.14 Opérateur intégral de Cesàro (mp/pc)

Soit $E = C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et $\Gamma : E \longrightarrow E$ l'endomorphisme défini par $\Gamma(f)(0) = f(0)$, et

$$\Gamma(f) : x \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt \qquad \text{si } x \neq 0$$

1. Justifier que Γ est bien défini.
2. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de Γ.

Eléments de solution:

1. Le résultat découle du théorème fondamental de l'analyse.
2. $\mathrm{sp}(\Gamma) = \mathbb{R}^*$, et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $E_\lambda(\Gamma) = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}\right)$.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

14.15 Le groupe $GL_n(\mathbb{Z})$ (mp/pc)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $GL_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, et dont l'inverse est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $M \in GL_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $|\det(M)| = 1$. Montrer que $GL_n(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $d \in \mathbb{N}^*$ tels que $M^d = I_n$. On pose $A = \dfrac{1}{3}(M - I_n)$. Etudier la convergence de la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$.
3. Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{Z})$. Pour un élément $M \in G$, on pose $\bar{M}$ la matrice dont les coefficients sont ceux de M modulo 3. Montrer que le morphisme $\Phi : M \mapsto \bar{M}$ est injectif. Déduire que G a au plus 3^{n^2} éléments.

Eléments de solution:

1. Si $M \in GL_n(\mathbb{Z})$, alors $\det(M).\det(M^{-1}) = \det(I_n) = 1$, donc $\det(M)$ est un élément inversible de $\mathbb{Z}$, donc égal à ± 1. Réciproquement, si $\det(M) = \pm 1$, alors M est inversible, et la formule de l'inverse d'une matrice montre que l'inverse est à coefficients entiers.
2. Comme $M^d = I_n$, alors $X^d - 1$ est un polynôme annulateur à racines simples de M, donc M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et ses valeurs propres sont parmi les racines d'ordre d de l'unité, donc toutes de module ≤ 1. Donc A est diagonalisable et il suit de l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$ que les valeurs propres de A sont toutes en module $\leq \dfrac{2}{3}$. On en déduit alors que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.
3. Φ est un morphisme entre les groupes G et $GL_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. Montrons que $\ker(\Phi) = \{I_n\}$. Soit d l'ordre de G et $M \in G$ tel que $\Phi(M) = \bar{I_n}$. Montrons que $M = I_n$. Comme $\bar{M} = \bar{I_n}$, alors la matrice $A := \dfrac{1}{3}(M - I_n)$ est à coefficients entiers. D'après la question précédente, $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, donc elle est nulle à partir d'un certain rang. Soit alors $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$. Les polynômes $X^d - 1$ et $(X-1)^p$ sont tous les deux des polynômes annulateurs de M, donc leur PGCD $X - 1$ est annulateur, et alors $M = I_n$. On en déduit que Φ est injective, et que la cardinalité de G est inférieure ou égale à celle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ qui est 3^{n^2}.

14.16 Éléments propres d'un opérateur intégral (mp/pc)

Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Pour $f \in E$ on note $T(f): [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$T(f)(x) = \int_0^1 \min(x,t)f(t)\,dt.$$

1. Montrer que $T \in \mathcal{L}(E)$.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de T.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

14.17 Éléments propres d'un opérateur sur les suites (mp/pc)

Soit $\mathcal{B} = \{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} : u \text{ bornée}\}$ et $T : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ qui à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ associe la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}+u_{n-1}}{2}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$.
Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de T.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

15 Topologie et espaces vectoriels normés

15.1 Graphe fermé (mp/pc)

Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques, et $f : E \longrightarrow E'$ une application.

1. Montrer que si f est continue, alors le graphe de f est fermé dans $E \times E'$. La réciproque est-elle vraie?
2. Supposons maintenant que E' est compact. Montrer que si le graphe de f est fermé dans $E \times E'$, alors f est continue.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

15.2 Compacité de $O_n(\mathbb{R})$, Densité de $GL_n(\mathbb{C})$ (mp/pc)

Montrer que le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est compact.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{C})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

15.3 L'ensemble des matrices complexes diagonalisables est dense (mp/pc)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'ensemble $\Delta_n(\mathbb{C})$ des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Que peut on dire de $\Delta_n(\mathbb{R})$?

Solution sur YouTube: Cliquez ici

15.4 $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs, $GL_n(\mathbb{R})$ ne l'est pas (mp/pc)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs, alors que $GL_n(\mathbb{C})$ l'est.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

15.5 Valeurs d'adhérence d'une suite dont le pas tend vers 0 (mp/pc)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée telle que $(u_{n+1} - u_n)_n$ converge vers 0. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_n$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

15.6 Fonctions linéaires continues (mp/pc)

Soit E et F deux espaces vectoriels normés et $f \in L(E, F)$. Montrer l'équivalence entre:

1. f est continue ;
2. Pour toute suite (u_n) de E telle que $lim_{n\to\infty} u_n = 0$, la suite $(f(u_n))$ est bornée

Solution sur YouTube: Cliquez ici

15.7 Fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$ (mpsi/pcsi)

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ ayant une limite finie à l'infini. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

15.8 Un fermé borné non compact (mp/pc)

Trouver un exemple de fermé borné non compact dans un espace vectoriel normé.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

15.9 Un théorème de point fixe (mp/pc)

Soit E un espace métrique compact, et $f : E \longrightarrow E$ vérifiant

$$\forall x \neq y, d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

1. Montrer que f admet un unique point fixe. Indication: considérer la fonction $g(x) := d(f(x), x)$
2. Soit $u_0 \in K$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge vers le point fixe de f.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

15.10 Adhérence dans un espace de suites (mp/pc)

Soit E l'ensemble des suites réelles convergentes muni de $||.||_\infty$, et soit A le sous-ensemble des suites à support fini. Trouver l'intérieur et l'adhérence de A dans E.

15.11 Sous groupes de $(\mathbb{R}, +)$: soit discrets soit denses (mpsi/pcsi)

Soit $H \neq \{0\}$ un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$, $a = inf\{H \cap \mathbb{R}^{+*}\}$.

1. Si $a \neq 0$, montrer que $H = a.\mathbb{Z}$
2. Si $a = 0$ montrer que H est dense dans $\mathbb{R}$.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

15.12 Le noyau d'une forme linéaire discontinue est dense (mp/pc)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $\varphi : E \longrightarrow K$ une forme linéaire sur E.

1. Supposons que φ est continue. Montrer que $Ker\ \varphi$ est fermé dans E.
2. Supposons que φ est discontinue. Montrer que $Ker\ \varphi$ est dense dans E.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

16 Convexité

16.1 Inégalité de Hölder (mp/pc)

1. Soient α et β deux réels positifs tels que $\alpha+\beta=1$, et soient u et v deux réels positifs. Montrer que
$$u^\alpha v^\beta \leq \alpha u + \beta v$$
2. Soient $a=(a_1,\cdots,a_n)$ et $b=(b_1,\cdots,b_n)$ deux éléments de $(\mathbb{R}^+)^n$, et $p,q\in]1,+\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. Montrer que
$$\sum a_i b_i \leq \left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$
3. Soit $I=[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $p,q\in]1,+\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. Soient $f,g\in C(I,\mathbb{R}^+)$. Montrer que
$$\int_I f.g \leq \left(\int_I f^p\right)^{\frac{1}{p}}.\left(\int_I g^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Eléments de solution:

1. Comme la fonction ln est croissante, l'inégalité voulue est equivalente à $\ln\left(u^\alpha v^\beta\right)\leq \ln(\alpha u+\beta v)$, ou aussi
$$\alpha\ln u+\beta\ln v\leq \ln(\alpha u+\beta v).$$
Or cette dernière inétalité est vérifiée vu que la fonction ln est concave.
2. Pour tout i, posons $u_i=\dfrac{a_i^p}{\sum a_i^p}$ et $v_i=\dfrac{b_i^q}{\sum b_i^q}$. D'après la question 1, on a pour tout i
$$\frac{a_i b_i}{(\sum a_i^p)^{\frac{1}{p}}(\sum b_i^q)^{\frac{1}{q}}} = u_i^{\frac{1}{p}} v_i^{\frac{1}{q}} \leq \frac{u_i}{p}+\frac{v_i}{q} = \frac{1}{p}\frac{a_i^p}{\sum a_i^p}+\frac{1}{q}\frac{b_i^q}{\sum b_i^q}.$$
En sommant ces inégalités on obtient
$$\frac{\sum a_i b_i}{(\sum a_i^p)^{\frac{1}{p}}(\sum b_i^q)^{\frac{1}{q}}}\leq \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$
d'où le résultat voulu.
3. Posons pour tout $x\in I$, $u(x):=\dfrac{f^p(x)}{\int_I f^p(x)\,dx}$ et $v(x):=\dfrac{g^q(x)}{\int_I g^q(x)\,dx}$. D'après la question 1 on a pour tout $x\in I$
$$\frac{f(x)}{\left(\int_I f^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}}\frac{g(x)}{\left(\int_I g^q(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q}}} = (u(x))^{\frac{1}{p}}.(v(x))^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}u(x)+\frac{1}{q}g(x) = \frac{1}{p}\frac{f^p(x)}{\int_I f^p(x)\,dx}+\frac{1}{q}\frac{g^q(x)}{\int_I g^q(x)\,dx}$$
et en intégrant sur I on a le résultat voulu.

17 Espaces préhilbertiens réels

17.1 Norme d'un endomorphisme symétrique (mpsi/pcsi)

Soit H un espace préhilbertien réel muni d'un produit scalaire et T un endomorphisme continu de H vérifiant

$$\forall x \in H,\ \ \forall y \in H,\ \ < Tx, y > = < x, Ty > .$$

Montrer que $||T|| = \sup_{||x||=1} | < Tx, x > |$.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

17.2 Minimisation d'une intégrale (mpsi/pcsi)

Pour quelles valeurs de a et b la valeur

$$\int_0^1 (x^2 - ax - b)^2\, dx$$

atteint-elle son minimum sur $\mathbb{R}^2$? Calculer ce minimum.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

18 Espaces Euclidiens

18.1 Calcul d'une projection orthogonale (mpsi/pcsi)

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne usuelle. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteur $f_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $f_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$.

1. Calculer la matrice de la projection orthogonale p sur F dans la base canonique.
2. Donner, dans cette même base, la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à F.

Solution:

1. Les colonnes de la matrice recherchée sont les représentations dans la base canonique des images des éléments de cette même base.

   - Calcul de $p(e_1)$: C'est le vecteur de la forme $\alpha f_1 + \beta f_2$ vérifiant
   $$< \alpha f_1 + \beta f_2 - e_1, f_1 > = 0 \qquad \text{et} \qquad < \alpha f_1 + \beta f_2 - e_1, f_2 > = 0$$
   c'est à dire
   $$\begin{pmatrix}\alpha - 1\\ \alpha + \beta\\ \beta\\ \beta\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = 0 \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix}\alpha - 1\\ \alpha + \beta\\ \beta\\ \beta\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} = 0.$$
   On trouve $\alpha = \frac{3}{5}$ et $\beta = -\frac{1}{5}$ et $p(e_1) = \begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\ \frac{2}{5}\\ -\frac{1}{5}\\ -\frac{1}{5}\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\2\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

   - Calcul de $p(e_2)$: C'est le vecteur de la forme $\alpha f_1 + \beta f_2$ vérifiant
   $$< \alpha f_1 + \beta f_2 - e_2, f_1 > = 0 \qquad \text{et} \qquad < \alpha f_1 + \beta f_2 - e_2, f_2 > = 0$$
   c'est à dire
   $$\begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha + \beta - 1\\ \beta\\ \beta\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = 0 \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha + \beta - 1\\ \beta\\ \beta\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} = 0.$$
   On trouve $\alpha = \frac{2}{5}$ et $\beta = \frac{1}{5}$ et $p(e_2) = \begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\ \frac{3}{5}\\ \frac{1}{5}\\ \frac{1}{5}\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\\3\\1\\1\end{pmatrix}$.

   - Calcul de $p(e_3)$: C'est le vecteur de la forme $\alpha f_1 + \beta f_2$ vérifiant
   $$< \alpha f_1 + \beta f_2 - e_3, f_1 > = 0 \qquad \text{et} \qquad < \alpha f_1 + \beta f_2 - e_3, f_2 > = 0$$
   c'est à dire
   $$\begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha + \beta\\ \beta - 1\\ \beta\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = 0 \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha + \beta\\ \beta - 1\\ \beta\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} = 0.$$
   On trouve $\alpha = -\frac{1}{5}$ et $\beta = \frac{2}{5}$ et $p(e_3) = \begin{pmatrix}-\frac{1}{5}\\ \frac{1}{5}\\ \frac{2}{5}\\ \frac{2}{5}\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\2\end{pmatrix}$.

- Calcul de $p(e_4)$: C'est le vecteur de la forme $\alpha f_1 + \beta f_2$ vérifiant

$$< \alpha f_1 + \beta f_2 - e_4, f_1 > = 0 \qquad \text{et} \qquad < \alpha f_1 + \beta f_2 - e_4, f_2 > = 0$$

c'est à dire

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha+\beta \\ \beta \\ \beta-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha+\beta \\ \beta \\ \beta-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

On trouve $\alpha = -\frac{1}{5}$ et $\beta = \frac{2}{5}$ et $p(e_4) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

La matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est alors

$$\mathcal{M}(p_F) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2.

$$\mathcal{M}(s_F) = 2\mathcal{M}(p_F) - I_4 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 & -2 \\ 4 & 6 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 4 & 4 \\ -2 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & -2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

18.2 Familles obtusangles (mpsi/pcsi)

Soit $(u_1, \cdots, u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $(u_i, u_j) < 0$ pour $i \neq j$.

1. Montrer que $p-1$ vecteurs parmi eux forment toujours une famille libre de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que l'on ne peut trouver plus de $n+1$ vecteurs réunissant ces conditions.
3. Montrer que l'on peut en trouver $n+1$.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

18.3 Caractérisation des matrices positives par la trace (mp/pc)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Montrer que A est positive, si et seulement si $\text{Tr}(AB) \geq 0$ pour toute matrice symétrique positive B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

18.4 Matrices définies positives (mp/pc)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est positive (resp. définie positive) si

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, {}^t XAX \geq 0 \qquad \text{(resp. } > 0\text{)}.$$

1. Montrer que A est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.
2. Montrer que A est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

18.5 Racine p^{eme} d'une matrice symétrique et applications (mp/pc)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in S_n^+$ et $B \in S_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe une matrice $R \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = A$. Montrer que si $A \in S_n^{++}$, alors il en est de même pour R.
2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Comment peut on généraliser le résultat de la question 1, en termes d'existence d'une racine p^{eme} de A?
3. Montrer que toutes les valeurs propres de AB sont réelles.
4. Montrer que si $A \in S_n^{++}$ alors AB est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
5. Donner un exemple d'une matrice $A \in S_2^+$ et $B \in S_2(\mathbb{R})$ t.q. AB ne soit pas diagonalisable.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

18.6 Racine carrée d'un endomorphisme auto-adjoint positif - Existence et unicité (mp/pc)

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint et positif. Montrer qu'il existe un unique $h \in (E)$ auto-adjoint et positif, et tel que $u = h^2$. Montrer que h est un polynôme en u.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

18.7 Matrices de Hilbert

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit H_n la matrice de Hilbert définie par

$$H_n = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

1. Montrer que H_n est définie positive.
2. Montrer que $\det H_n = \dfrac{c_n^4}{c_{2n}}$, où $c_n := \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} k!$

Eléments de solution:

1. Sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on considère le produit scalaire défini par

$$< P, Q > = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt.$$

La matrice de ce produit scalaire dans la base $(1, X, \cdots, X^{n-1})$ est la matrice H_n. Or la matrice d'un produit scalaire est définie positive, d'où le résultat.

2. Une matrice de Hilbert est un cas particulier d'une matrice de Cauchy, avec $a_i = i - 1$ et $b_i = i$. On sait d'après 11.5 que le déterminant d'une matrice de Cauchy est donné par

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} = \frac{\prod\limits_{1\le i<j\le n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod\limits_{1\le i,j\le n} (a_i + b_j)}.$$

En remplaçant les a_i et b_j par leurs valeurs on obtient le résultat voulu.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

18.8 Décomposition QR et inégalité de Hadamard (mp/pc)

1. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple (Q, R) avec Q orthogonale de taille n, et $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictements positifs, telles que $A = QR$

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $C_1, \cdots, C_n$ les colonnes de A. Montrer que

$$|det(A)| \le ||C_1||.\cdots.||C_n||,$$

où $||.||$ désigne la norme Euclidienne.

Eléments de solution:

1. Une première méthode utilise la décomposition de Cholesky et le fait que si Q et R conviennent, alors on a nécessairement ${}^tR.R = {}^tA.A$. On donne ici une deuxième méthode.

   Comme A est inversible, ses colonnes forment une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$. On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à $\mathcal{C}$, et on obtient une base orthonormale $\mathcal{D} = (D_1, \cdots, D_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et notons par $\mathcal{P}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$ la matrice de passage d'une base $\mathcal{B}_1$ à une base $\mathcal{B}_2$. Par la formule de changement de base on a:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}.\mathcal{P}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}$$

   On a:

   - $A = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$
   - $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}$ est orthogonale car c'est une matrice de passage entre deux bases orthonormales
   - $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}$ est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs car donnée par Gram-Schmidt.

   On pose $Q = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}$ et $R = \mathcal{P}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}$, et on a le résultat.

2. Si $det(A) = 0$, l'inégalité devient triviale. Supposons que $det(A) \neq 0$. Soient $r_1, \cdots, r_n$ les coefficients diagonaux de R. On a successivement par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que Q est orthogonale

$$r_i = (C_i, D_i) \le ||C_i||.||D_i|| = ||C_i||$$

$$|det(A)| = |det(Q)|.|det(R)| = |det(R)| = \prod r_i \leq \prod ||C_i||$$

C'est le résultat voulu.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

18.9 Décomposition polaire (mp/pc)

1. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple (O, S) tel que $A = OS$ avec O orthogonale et S symétrique définie positive.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un couple (O, S) tel que $A = OS$ avec O orthogonale et S symétrique positive.

Eléments de solution:

1. Un argument d'analyse-synthèse montre que si cette factorisation est possible, alors on doit avoir l'égalité
$$S^2 = {}^tA.A$$
La matrice ${}^tA.A$ est symétrique définie positive, donc le théorème spectral s'applique et fournit la matrice S. On vérifie que pour la matrice S ainsi obtenue, si on pose $O = A.S^{-1}$, alors O est orthogonale. La partie "analyse" de l'argument montre l'unicité de cette décomposition.
2. On utilise un argument de densité.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

18.10 Décomposition de Cholesky (mp/pc)

On désigne par $\mathcal{S}_n^+$ l'ensemble des matrices réelles symétriques positives, et par $\mathcal{S}_n^{++}$ l'ensemble des matrices réelles symétriques définies positives.

1. Soit $S \in \mathcal{S}_n^+$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $S = {}^tA.A$
2. Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}$. Montrer qu'il existe une unique matrice A triangulaire supérieure et à coefficients diagonaux strictement positifs, telle que $S = {}^tA.A$

Eléments de solution: Le 1 peut être obtenu par l'application du théorème spectral. La décomposition de Cholesky est donnée par le 2, qu'on obtient comme suit. La matrice S définit un produit scalaire φ sur $\mathbb{R}^n$. On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à φ et la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$. On obtient ainsi une nouvelle base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^n$, orthonormale pour le produit scalaire φ. Soit A la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$. Les matrices de φ dans les base $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$ sont données respectivement par I_n et S. On a alors la relation
$$S = {}^tA.I_n.A = {}^tA.A$$
A est triangulaire et à coefficients diagonaux strictement positifs car obtenue par application du procédé de Gram-Schmidt

Pour l'unicité, soit B une autre matrice avec ces propriétés. On constate que $A.B^{-1} = {}^t(B.A^{-1})$ est une matrice orthogonale, à coefficients diagonaux positifs, et qui est diagonale car à la fois triangulaire supérieure et inférieure. D'où $A.B^{-1} = I_n$, et l'unicité en suit.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

18.11 Inégalité de Hadamard (mp/pc)

Soit $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive. Démontrer que

$$det\ A \leq \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Eléments de solution: Si $det(A) = 0$ alors le résultat découle directement du fait que les a_{ii} sont positifs. Sinon A est inversible, et on applique la décomposition de Cholesky. Soit P une matrice triangluaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ telle que

$$A = {}^tP.P$$

Soient $C_1, \cdots, C_n$ les colonnes de P. On a alors pour tout i, $a_{ii} = ||C_i||^2 \geq \lambda_i^2$, d'où

$$\prod_{i=1}^{n} a_{ii} \geq \prod_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = (det(P))^2 = det(A).$$

Solution sur YouTube: Cliquez ici

18.12 Toute matrice symétrique positive est une matrice de Gram (mp/pc)

On rappelle que la matrice de Gram associée aux vecteurs $v_1, \cdots, v_m$ d'un espace euclidien E est la matrice $G(v_1, \cdots, v_m)$ de $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ de terme général $< v_i|v_j >$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $S \in S_n^+(R)$.

1. Montrer qu'il exsite n vecteurs $v_1, \cdots, v_n$ de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$S = G(v_1, \cdots, v_n)$$

2. Supposer que le rang de S est p. Montrer qu'il exsite n vecteurs $v_1, \cdots, v_n$ de $\mathbb{R}^p$ tels que

$$S = G(v_1, \cdots, v_n)$$

Eléments de solution:

1. Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeus propres de S, et $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que

$$S = {}^tP.diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n).P$$

Posons $A = diag(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}).P$ et $v_1, \cdots, v_n$ les colonnes de A vues comme des éléments de $\mathbb{R}^n$. On a clairement ${}^tA.A = S$, et parsuite $S = G(v_1, \cdots, v_n)$.

2. Il suffit de trouver $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tB.B = S$. La liste des valeurs propres de S est $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p, 0, \cdots, 0)$, et la matrice A définie dans 1 est de la forme $\begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$ où $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et 0 est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n-p,n}(\mathbb{R})$. On vérifie que ${}^tB\,.B =^t A\,A = S$.

Solution sur YouTube: Cliquez ici

19 Calcul différentiel

19.1 Différentielle d'un déterminant (mp/pc)

1. Prouver que l'application $\varphi : GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui à X associe $(det\ X)X^{-1}$ admet un et un seul prolongement continu $\overline{\varphi}$ à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Prouver que

$$\left(\frac{d}{dt}(\det(A + tB))\right)_0 = \mathrm{Tr}(\overline{\varphi}(A)B).$$

20 Probabilités

20.1 Urne de Pólya (mpsi/pcsi)

Soient $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient a boules rouge et b boules noires. On tire une boule au hasard, on constate sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c nouvelles boules de sa couleur. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, R_n l'évènement: la n^{ieme} boule tirée est rouge.

1. Calculer $P(R_1)$ et $P(R_2)$.
2. Calculer $P(R_n)$ pour tout n.

Eléments de solution:

1. $P(R_1) = P(R_2) = \dfrac{a}{a+b}$

2. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(R_n) = \dfrac{a}{a+b}$. Supposons le résultat montré jusqu'à l'ordre n, montrons le pour $n+1$. On remarque d'abord qu'à l'issue du n^{eme} tirage, l'urne contient exactement $a+b+nc$ boules, dont au moins a sont rouges et au moins b sont noires. Pour tout $k \in |[0, n]|$, soit A_k l'évènement: à l'issue du n^{eme} tirage, on a déjà ajouté $k.c$ nouvelles boules rouges et $(n-k)c$ nouvelles boules noires. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(R_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n} P(A_k).P(R_{n+1}|A_k)$$

On a clairement $P(R_{n+1}|A_k) = \dfrac{a+kc}{a+b+nc}$, et d'après l'hypothèse de récurrence,

$$P(A_k) = \binom{n}{k}\left(\frac{a}{a+b}\right)^k\left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-k}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
P(R_{n+1}) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{a}{a+b}\right)^k\left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-k}\frac{a+kc}{a+b+nc}\\
&= \frac{a}{a+b+nc}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{a}{a+b}\right)^k\left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-k} + \frac{c}{a+b+nc}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{a}{a+b}\right)^k\left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-k}k\\
&= \frac{a}{a+b+nc}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}\right)^n + \frac{c}{a+b+nc}\mathbb{E}\left(Bin\left((n,\frac{a}{a+b}\right)\right)\\
&= \frac{a}{a+b+nc} + \frac{c}{a+b+nc}.\frac{na}{a+b}\\
&= \frac{a}{a+b+nc}\left(1+\frac{nc}{a+b}\right)\\
&= \frac{a}{a+b+nc}\left(\frac{a+b+nc}{a+b}\right)\\
&= \frac{a}{a+b}
\end{aligned}$$

Solution sur YouTube: Cliquez ici

20.2 Allumettes de Banach (mpsi/pcsi)

On a deux boites d'allumettes G et D chacune contenant n allumettes. On choisit aléatoirement une boite et on en retire une allumette, et on recommence jusqu'à ce que l'une des deux boites soit vide.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire R du nombre d'allumettes restant dans l'autre boite.
2. Dans cette question, on considère qu'on s'arrête lorsque pour la première fois on choisit une boite et on constate qu'elle est vide. Déterminer la loi de la variable aléatoire R' du nombre d'allumettes restant dans l'autre boite.
3. Calculer l'espérance de R, et déduire que $\mathbb{E}(R) \sim_{+\infty} 2\sqrt{\dfrac{n}{\pi}}$

Eléments de solution:

1. Les valeurs possibles de R sont $1, \cdots, n$, et il faut calculer $\mathbb{P}(R = k)$ pour chacune de ces valeurs. Soit G_k l'évènement "la boite G se vide en premier, alors qu'il reste k allumettes dans D", et D_k l'évènement "la boite D se vide en premier, alors qu'il reste k allumettes dans G". L'évènement "$R = k$" est la réunion disjointe de G_k et D_k qui par symétrie du problème ont la même probabilité, et on a alors
$$\mathbb{P}(R = k) = \mathbb{P}(G_k) + \mathbb{P}(D_k) = 2\mathbb{P}(G_k).$$
Calculons alors $\mathbb{P}(G_k)$. L'évenement G_k a lieu lorsque les $2n - k$ premiers tirages sont tels que: n parmi ces $2n - k$ se font dans la boite G, et le dernier tirage se fait dans G. On a
$$\mathbb{P}(G_k) = \frac{1}{2}\binom{2n-k-1}{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{1}{2}\binom{2n-k-1}{n-1}\frac{1}{2^{2n-k-1}}$$
et
$$\mathbb{P}(R = k) = 2\mathbb{P}(G_k) = \binom{2n-k-1}{n-1}\frac{1}{2^{2n-k-1}}.$$
2. Les valeurs possibles de R' sont $0, \cdots, n$, et il faut calculer $\mathbb{P}(R' = k)$ pour chacune de ces valeurs. Soit G'_k l'évènement "on constate en premier que la boite G est vide, et il reste alors k allumettes dans D", et D'_k l'évènement "on constate en premier que la boite D est vide, et il reste alors k allumettes dans G". L'évènement "$R' = k$" est la réunion disjointe de G'_k et D'_k qui par symétrie du problème ont la même probabilité, et on a alors
$$\mathbb{P}(R' = k) = \mathbb{P}(G'_k) + \mathbb{P}(D'_k) = 2\mathbb{P}(G'_k).$$
Calculons alors $\mathbb{P}(G'_k)$. L'évenement G'_k a lieu lorsque les $2n - k + 1$ premiers tirages sont tels que: $n + 1$ parmi ces $2n - k + 1$ se font dans la boite G, et le dernier tirage se fait dans G. On a
$$\mathbb{P}(G'_k) = \frac{1}{2}\binom{2n-k}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{1}{2}\binom{2n-k}{n}\frac{1}{2^{2n-k}}$$
et
$$\mathbb{P}(R' = k) = 2\mathbb{P}(G'_k) = \binom{2n-k}{n}\frac{1}{2^{2n-k}}.$$
3. Notons d'abord que
$$\sum_{k=1}^{n}\binom{2n-k-1}{n-1}\frac{1}{2^{2n-k-1}} = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(R = k) = 1 \qquad (*)$$
et que
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n-k}{n}\frac{1}{2^{2n-k}} = \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(R' = k) = 1 \qquad (**)$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(R) &= \sum_{k=1}^{n}\binom{2n-k-1}{n-1}\frac{1}{2^{2n-k-1}}.k \\
&= \sum_{k=1}^{n}\binom{2n-k-1}{n-1}\frac{1}{2^{2n-k-1}}.(2n-(2n-k)) \\
&= 2n\sum_{k=1}^{n}\binom{2n-k-1}{n-1}\frac{1}{2^{2n-k-1}}-\sum_{k=1}^{n}\binom{2n-k-1}{n-1}\frac{2n-k}{2^{2n-k-1}} \\
&= 2n-\sum_{k=1}^{n}\binom{2n-k-1}{n-1}\frac{2n-k}{2^{2n-k-1}} \qquad\qquad (*) \\
&= 2n-\sum_{k=1}^{n}\frac{(2n-k)!}{(n-k)!n!}\frac{n}{2^{2n-k-1}} \\
&= 2n-2n\sum_{k=1}^{n}\frac{(2n-k)!}{(n-k)!n!}\frac{1}{2^{2n-k}} \\
&= 2n-2n\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n-k)!}{(n-k)!n!}\frac{1}{2^{2n-k}}-\frac{(2n)!}{n!.n!}\frac{1}{2^{2n}}\right) \\
&= 2n-2n\left(1-\frac{(2n)!}{n!.n!}\frac{1}{2^{2n}}\right) \qquad\qquad (**) \\
&= \binom{2n}{n}\frac{2n}{2^{2n}}
\end{aligned}
$$

On rappelle la formule de Stirling:

$$n! \sim_{+\infty} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

On a alors

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(R) &= \binom{2n}{n}\frac{2n}{2^{2n}} \\
&= \frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{2n}{2^{2n}} \\
&\sim_{+\infty} \frac{2^{2n}n^{2n}e^{-2n}\sqrt{2\pi}\sqrt{2n}}{n^{2n}e^{-2n}2\pi n}\frac{2n}{2^{2n}} \\
&\sim_{+\infty} 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}
\end{aligned}
$$

Solution sur YouTube: Cliquez ici

20.3 Deux urnes et n boules: étude d'une chaîne de Markov (mpsi/pcsi)

Etant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant à elles deux n boules numérotées de 1 à n. On note N_0 la variable aléatoire égale au nombre de boules initialement contenues dans l'urne U_1. A chaque instant entier $k \in \mathbb{N}^*$, on choisit un des n numéros de façon équiprobable puis on change d'urne la boule portant ce numéro. Les choix successifs sont supposés indépendants.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note N_k la variable aléatoire égale au nombre de boules dans l'urne U_1 après l'échange effectué à l'instant k. Pour $l \in [[0, n]]$, on note $E_{k,l}$ l'événement "$N_k = l$" et $p_{k,l} = \mathbb{P}(E_{k,l})$.

On note enfin $Z_k = \begin{pmatrix} p_{k,0} \\ p_{k,1} \\ \vdots \\ p_{k,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$ le vecteur qui code la loi de N_k, et A_n la matrice de Clément de taille $n+1$,

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Que peut-on dire de la famille $(E_{k,0}, E_{k,1}, \cdots, E_{k,n})$?
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Z_{k+1} = \dfrac{1}{n} A_n Z_k$, puis que
$$Z_k = \frac{1}{n^k} A_n^k Z_0$$
3. On suppose qu'à l'instant initial, on a disposé de façon équiprobable et indépendamment les unes des autres les n boules dans l'une des urnes U_1 ou U_2. Déterminer la loi de N_0, et montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, N_k a la même loi que N_0.

Eléments de solution: