

Suites et séries de fonctions

SSF 4-2 Exercices

Exercice 2

Etudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes.

$$\textcircled{1} \quad f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{nx}{1 + n^2x^2}$$

$$\textcircled{2} \quad f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1 + (x + n)^2}$$

$$f_n : x \mapsto \frac{nx}{1 + n^2x^2}$$

$(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle car pour tout x , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1 + n^2x^2} = 0.$$

$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$, alors $\forall n, \|f_n - 0\|_\infty \geq \frac{1}{2}$ et la suite numérique $(\|f_n - 0\|_\infty)_n$ ne converge pas vers 0. La convergence n'est donc pas uniforme.

$$f_n : x \mapsto \frac{1}{1 + (x + n)^2}$$

$(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle.

$f_n(-n) = 1$, alors $\forall n, \|f_n - 0\|_\infty \geq 1$ et la suite numérique $(\|f_n - 0\|_\infty)_n$ ne converge pas vers 0. La convergence n'est donc pas uniforme.