

# Suites et séries de fonctions

## SSF 1-4 - Exemples et Questions-Réponses

## Exemple

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la fonction  $f_n$  de  $\mathbb{R}^+$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  par

$$f_n(x) = n^2 x^2 e^{-nx}.$$

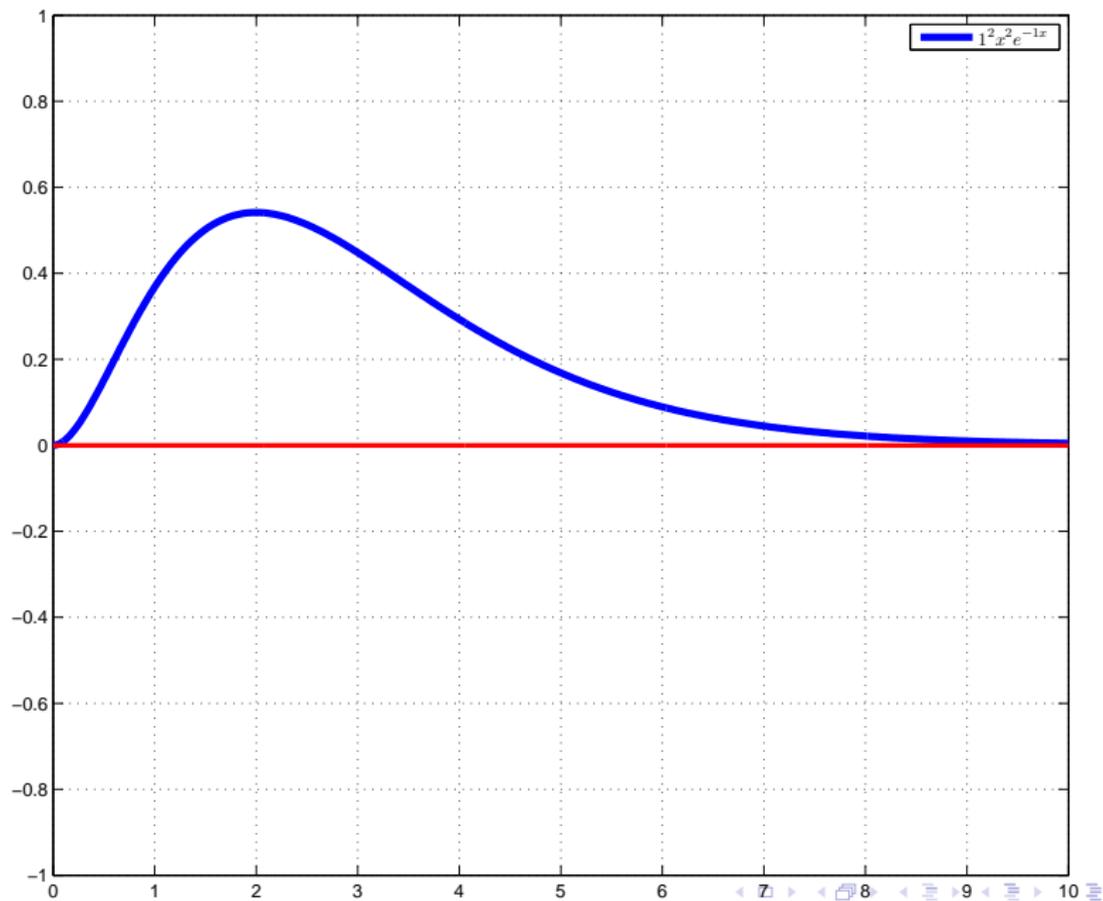
On a convergence simple vers la fonction nulle.

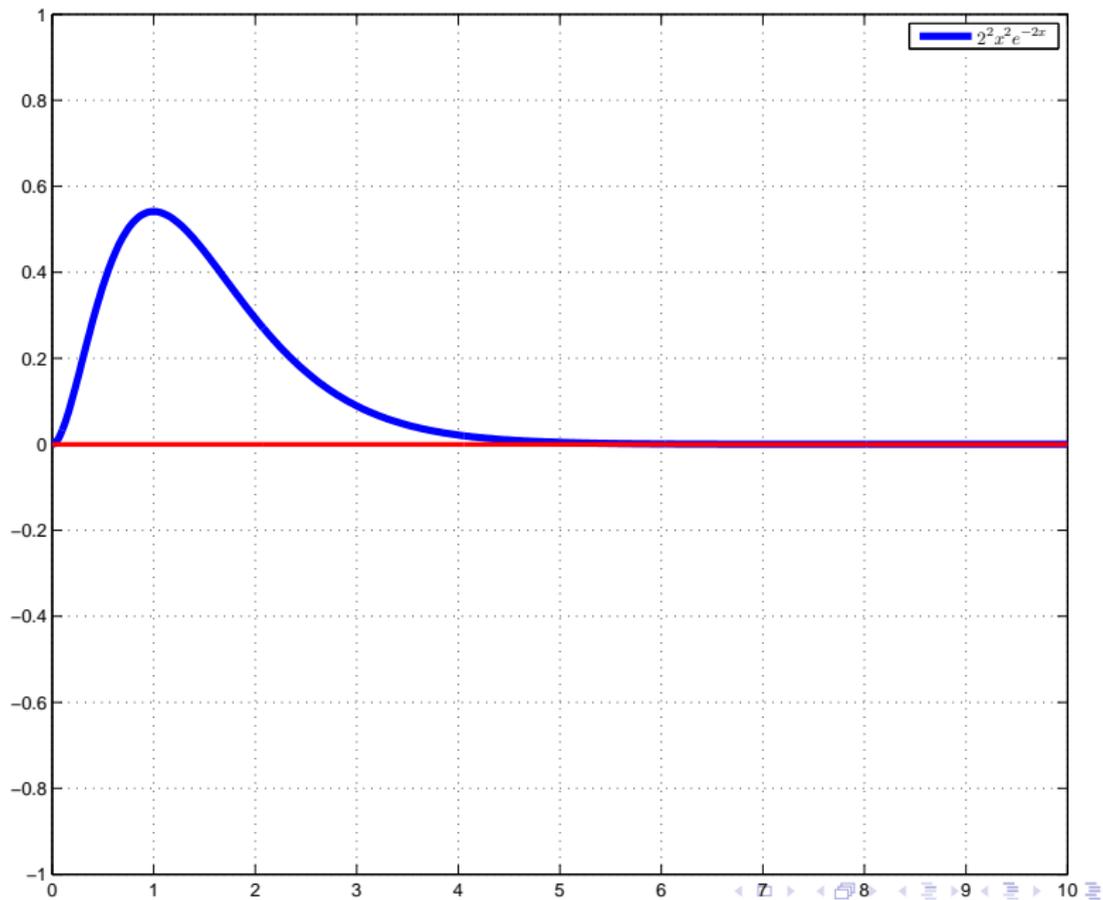
$$(f_n - 0)'(x) = n^2 x e^{-nx} (2 - nx),$$

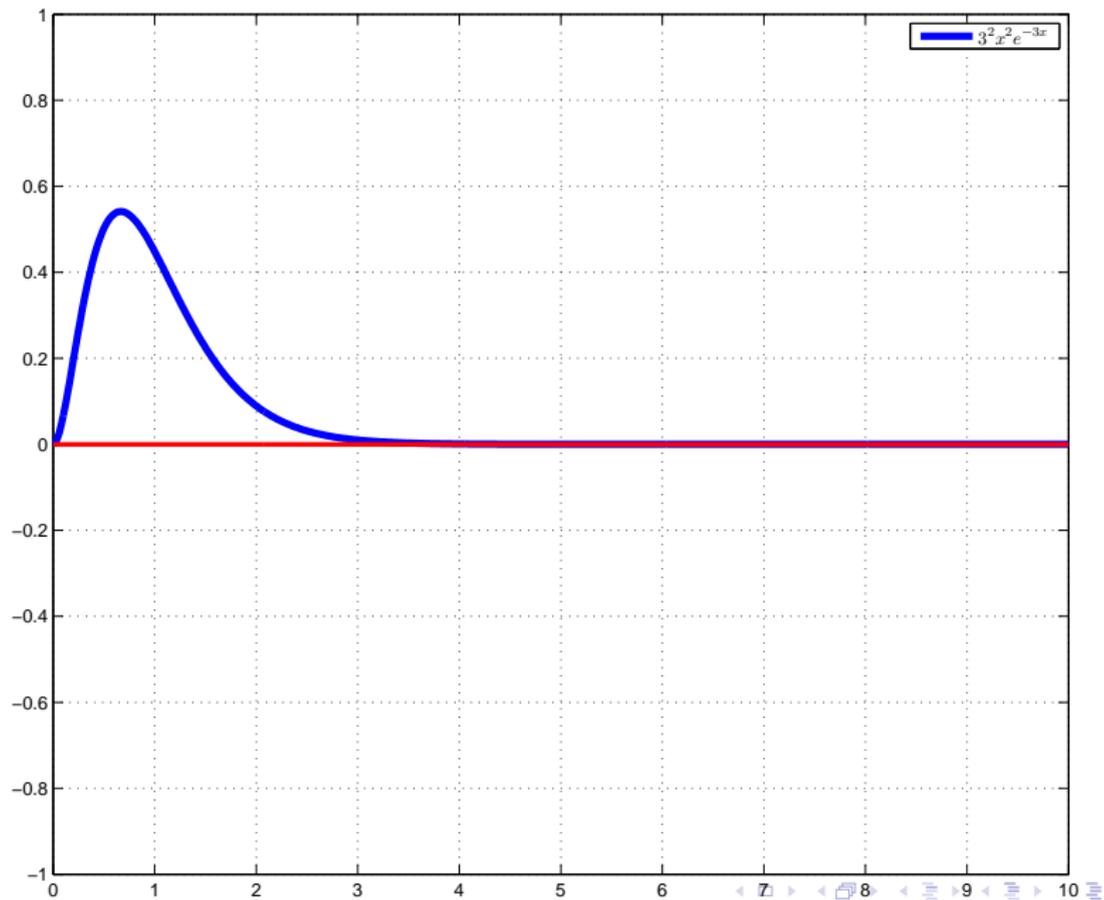
la dérivée s'annule en  $x_n = 2/n$ , et

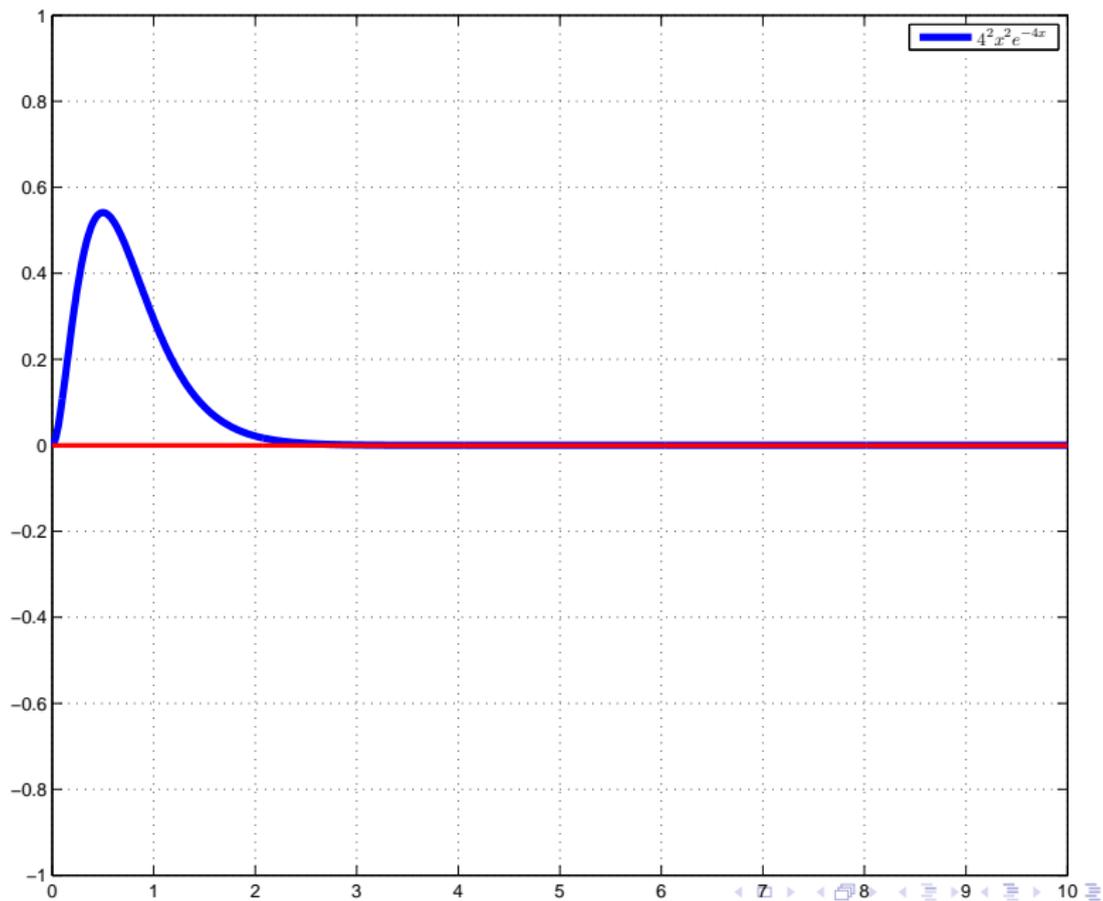
$$\|f_n - 0\|_\infty = f_n(x_n) = 4e^{-2}.$$

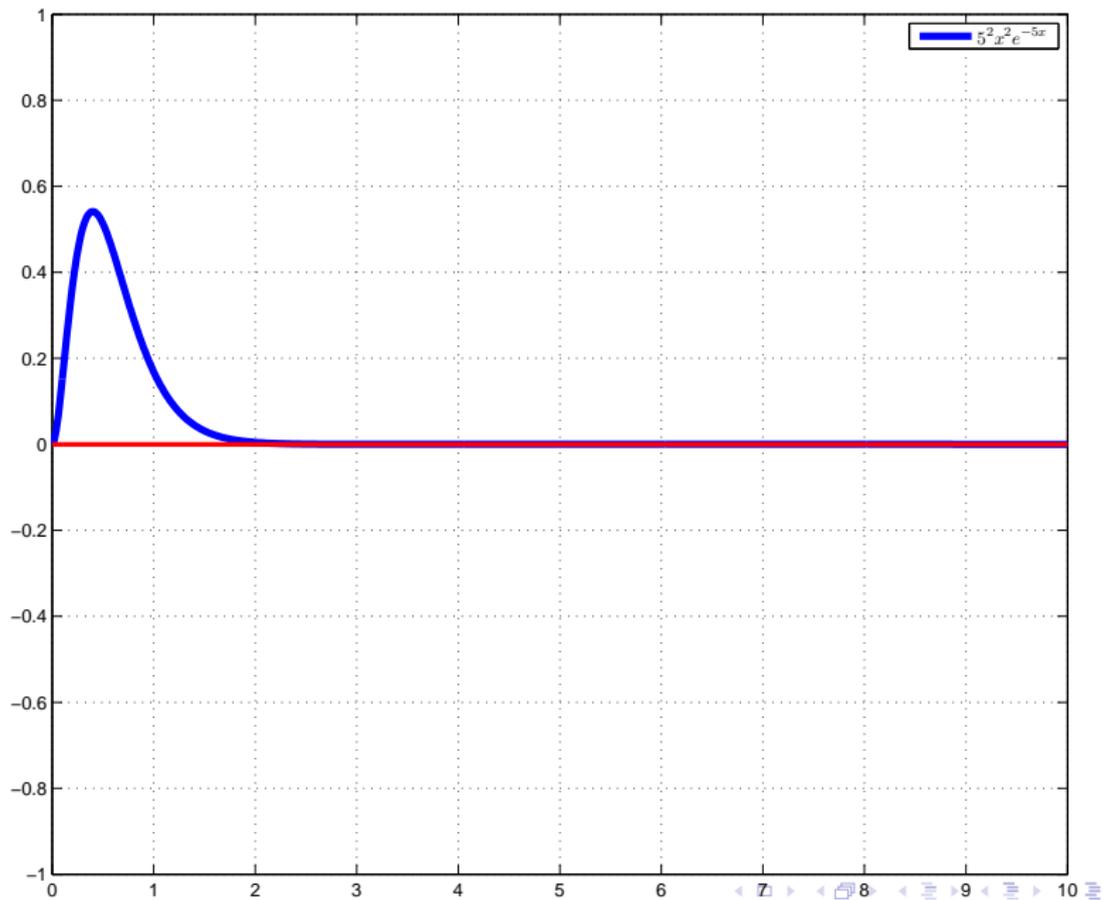
La convergence n'est pas uniforme.

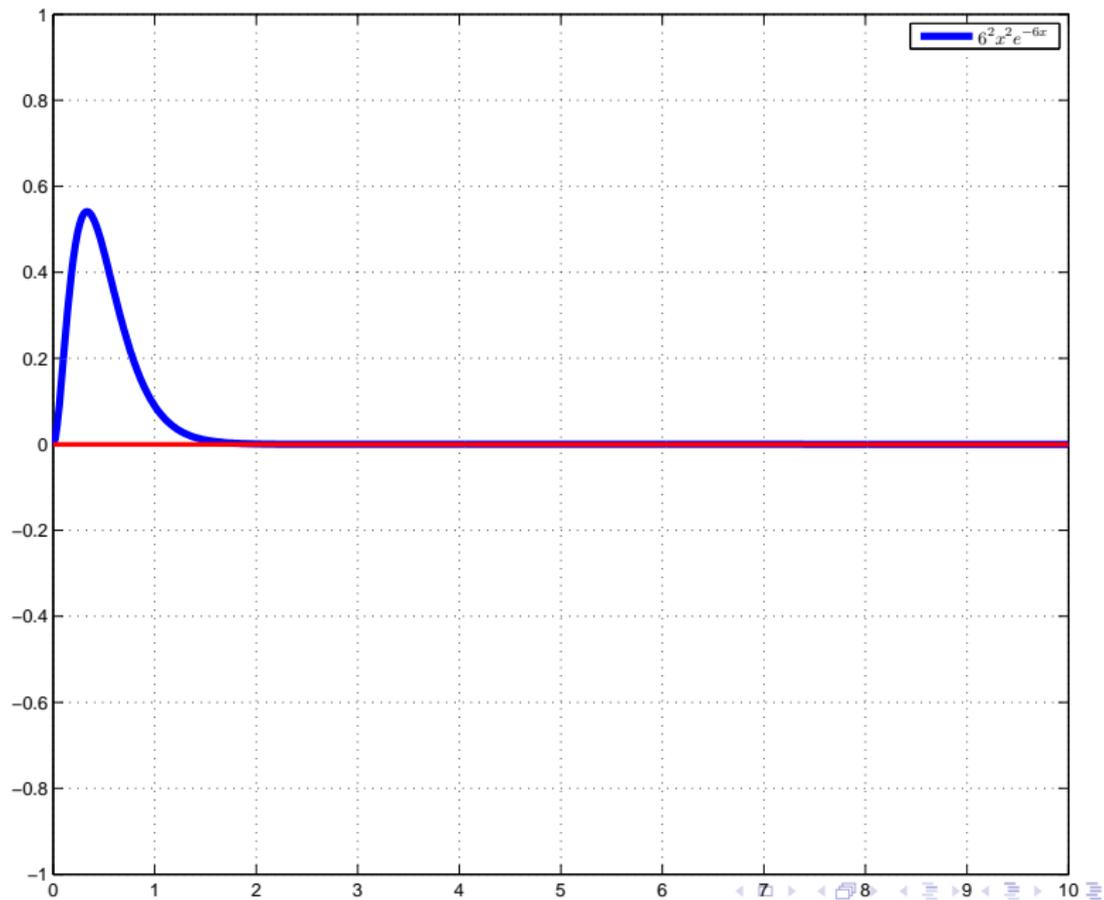


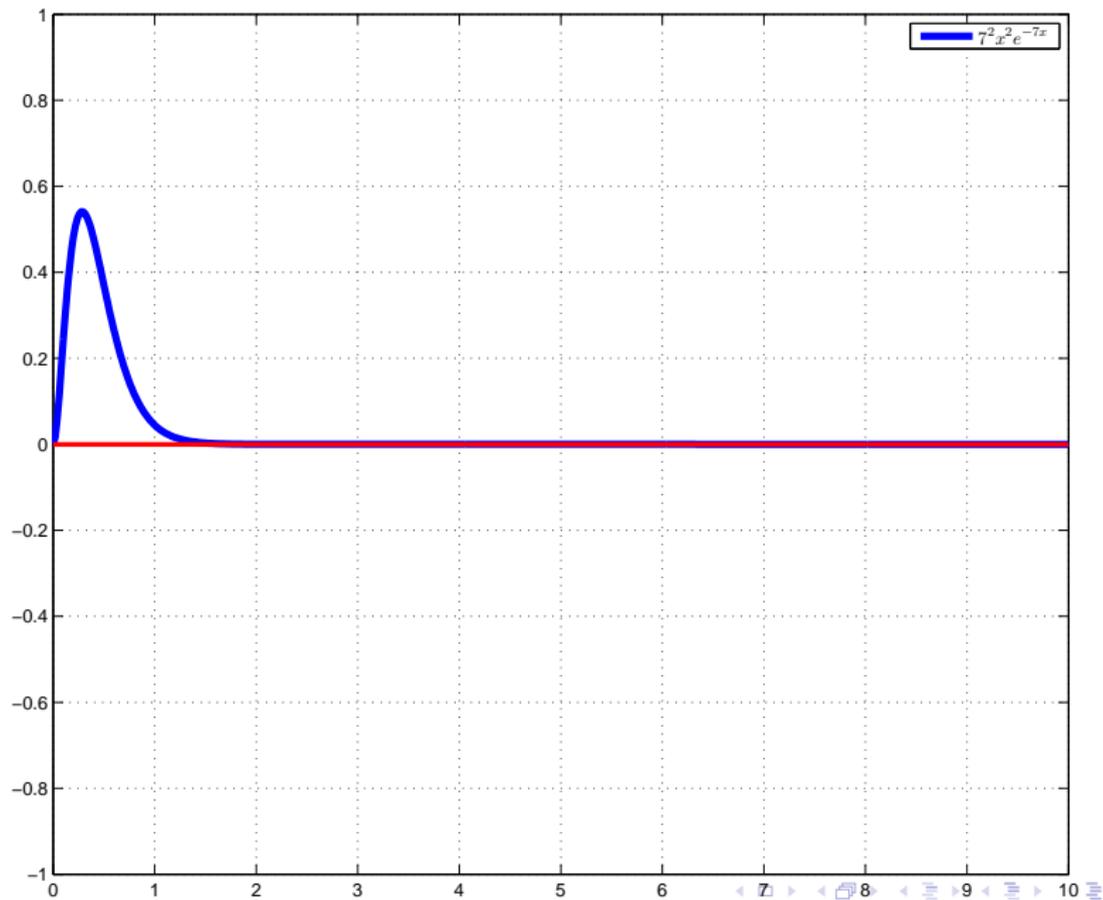


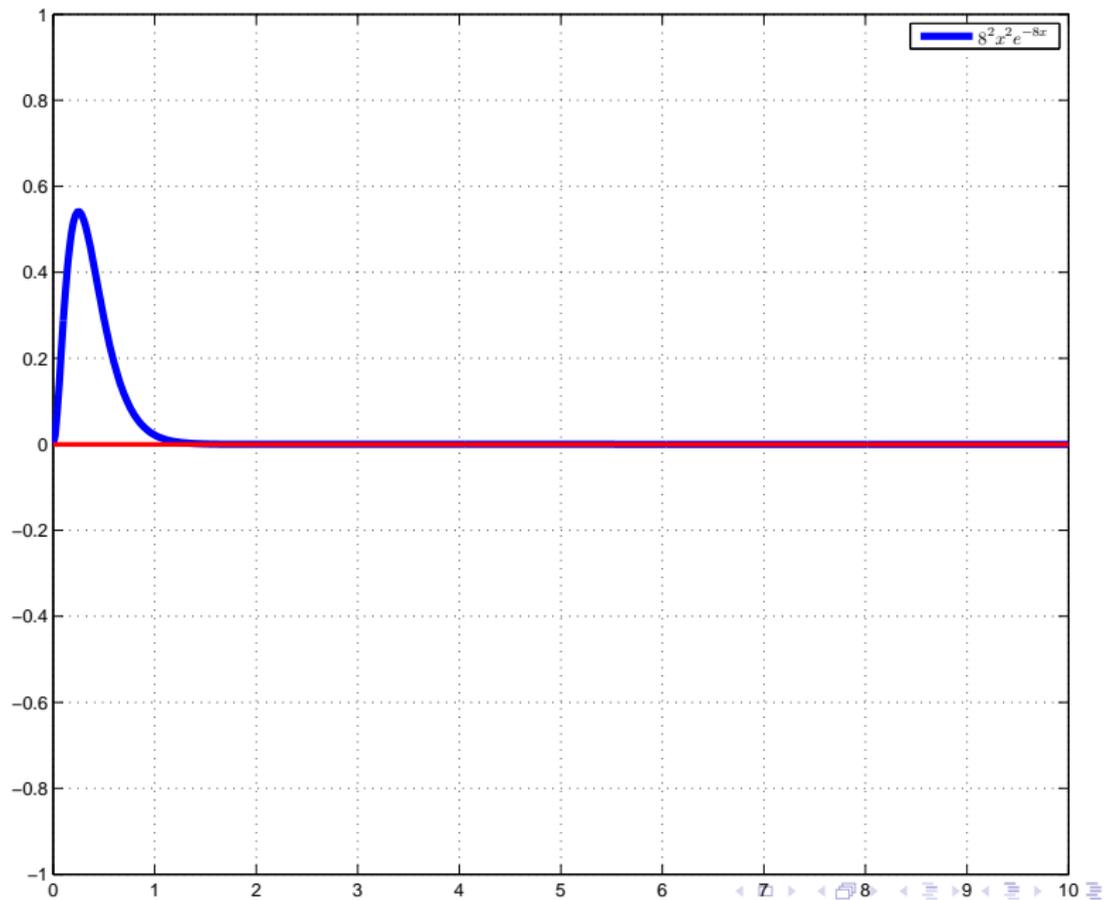


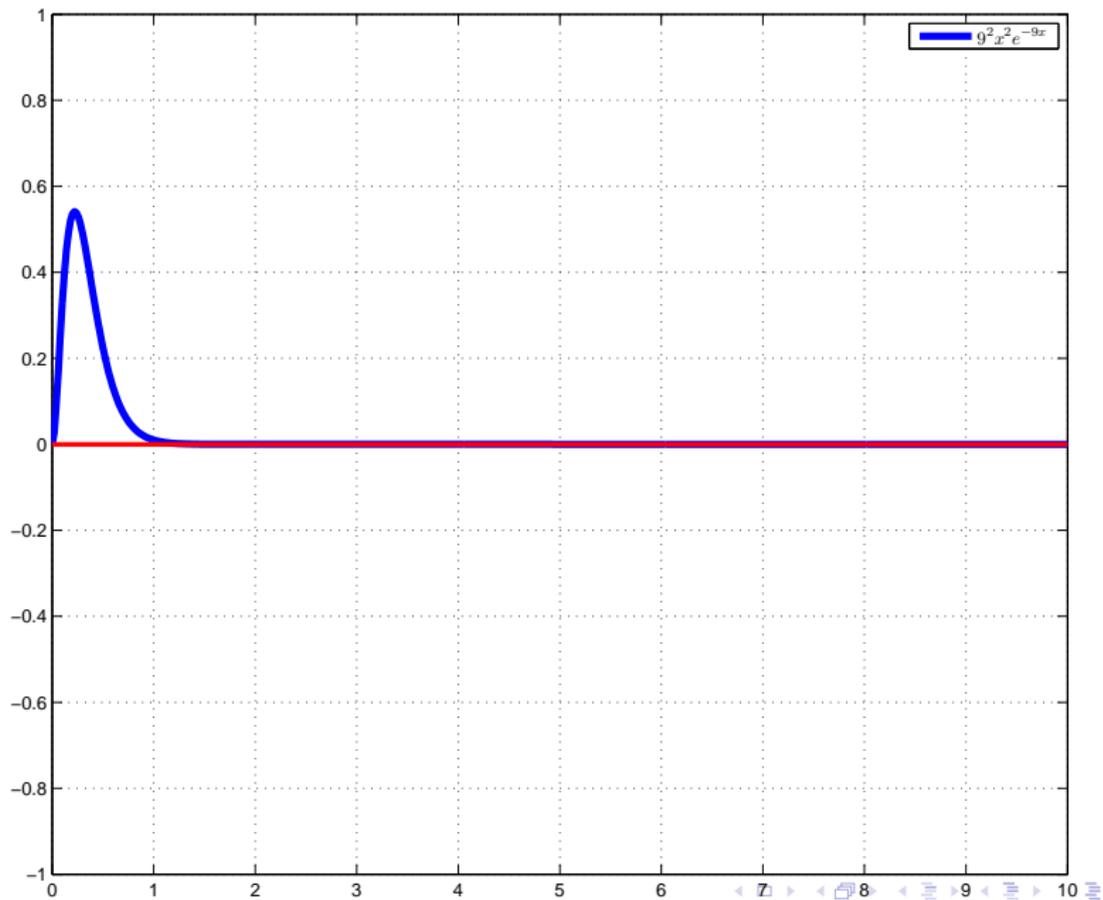


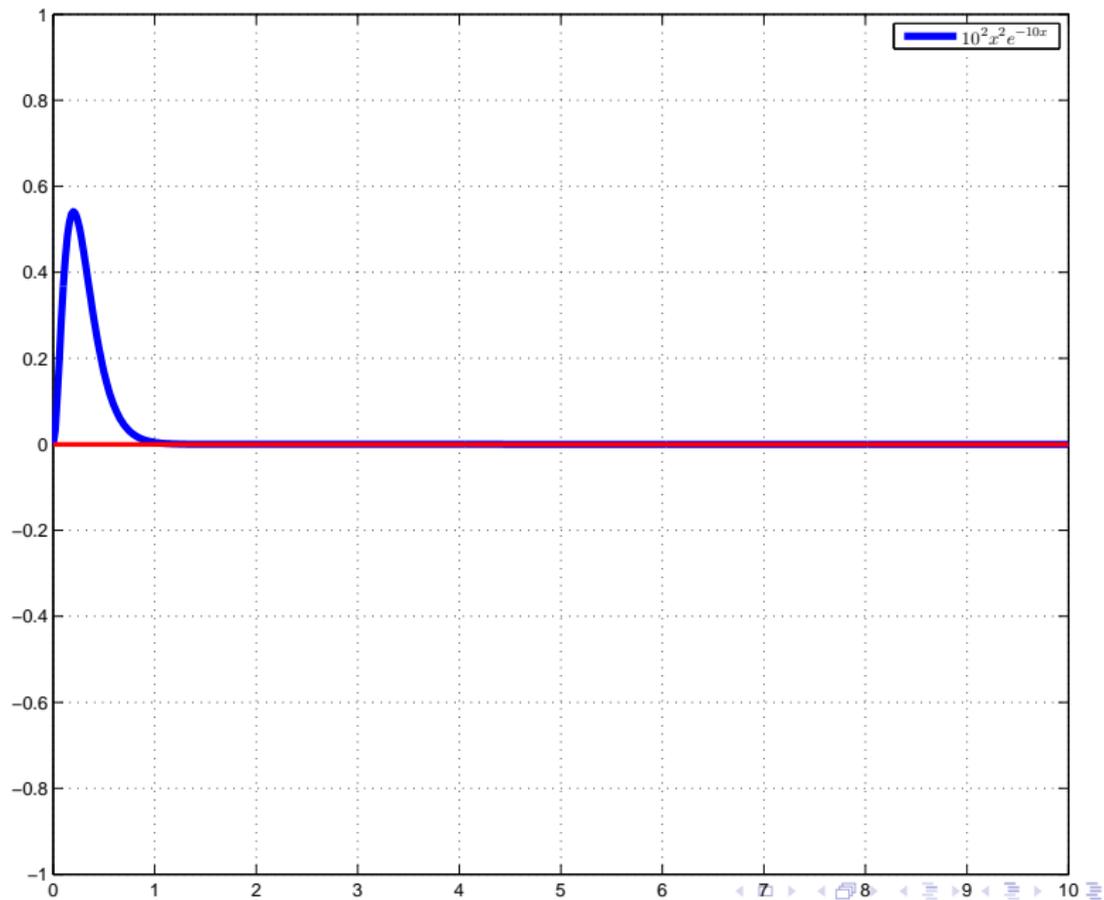












## Question:

On définit pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  la fonction  $f_n$  par:

$$f_n(x) = x^n.$$

Alors la suite  $(f_n)_n$

- ① converge uniformément sur  $\mathbb{R}$
- ② converge uniformément sur une partie  $A$  de  $\mathbb{R}$ , mais pas sur  $\mathbb{R}$
- ③ ne converge pas uniformément sur aucune partie  $A$  de  $\mathbb{R}$

Réponse: 2

## Question:

On définit pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  la fonction  $f_n$  par:

$$f_n(x) = x^2 + (\sin(5x))/n.$$

Alors la suite  $(f_n)_n$

- ① converge simplement sur  $\mathbb{R}$
- ② converge uniformément sur  $\mathbb{R}$
- ③ ne converge pas simplement sur  $\mathbb{R}$

Réponses: 1 et 2

## Question:

On définit pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  la fonction  $f_n$  par:

$$f_n(x) = (\sin x)^n.$$

Alors la suite  $(f_n)_n$

- 1 converge simplement sur  $\mathbb{R}$
- 2 converge simplement sur toute partie  $A$  de  $\mathbb{R}$ , mais pas sur  $\mathbb{R}$
- 3 converge simplement sur une partie  $A$  de  $\mathbb{R}$ , mais pas sur  $\mathbb{R}$

Réponse: 3

## Question:

Soit  $A \subset \mathbb{R}$ , et pour tout  $n$ ,  $f_n$  la fonction définie sur  $A$  par

$$f_n(x) = \frac{x}{n}.$$

Alors

- ① Pour tout  $A$ ,  $(f_n)_n$  converge simplement
- ② Pour certains  $A$ ,  $(f_n)_n$  ne converge pas simplement
- ③ Pour tout  $A$ ,  $(f_n)_n$  converge uniformément
- ④ Pour certains  $A$ ,  $(f_n)_n$  converge uniformément

Réponse: 1 et 4