- $f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$
- $f(z) = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x+iy} = \dfrac{1}{x+iy}.\dfrac{x-iy}{x-iy} = \dfrac{x}{x^2+y^2} + i\dfrac{-y}{x^2+y^2}.$
- $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y.$

Si $f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$ est holomorphe, alors

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Ce sont les formules de Cauchy-Riemann

On écrit $h = \Delta x + i\Delta y$, on se fixe $z = x + iy$, et on suppose que $f'(z) = a + ib$. On fait d'abord tendre h vers 0, tout en supposant que $\Delta y = 0$. On a alors que

$$Lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x + \Delta x, y) - P(x, y) + i(Q(x + \Delta x, y) - Q(x, y))}{\Delta x} = a + ib,$$

d'où

$$\frac{\partial P}{\partial x} = a, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = b.$$

On reprend le même argument en supposant que $\Delta x = 0$. On a alors que

$$Lim_{\Delta y \to 0} \frac{P(x, y + \Delta y) - P(x, y) + i(Q(x, y + \Delta y) - Q(x, y))}{i\Delta y} = a + ib,$$

d'où

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -b, \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = a.$$

D'où le résultat.

Remarque

La réciproque du théorème précédent est vraie: si les dérivées partielles de P, Q sont définies et continues, et verifient les formules de Cauchy Riemann, alors f est holomorphe.

Les fonctions suivantes ne sont pas holomorphes:

- $f : x + iy \mapsto x^2 - y^2 - 2ixy$
- $h : x + iy \mapsto x - iy$
- $g : x + iy \mapsto x^2 + y^2$

Remarque

Une fonction non constante $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ *n'est jamais holomorphe.*