Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction, et soit

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

Définition

Si $f'(z_0)$ existe pour tout z_0 dans le domaine de f, et la fonction $z_0 \mapsto f'(z_0)$ est continue, on dit que f est holomorphe.

Fait

- *La somme deux fonctions holomorphes sur U est une fonction holomorphe sur U, et on a*

$$(f+g)' = f' + g'$$

- *Le produit de deux fonctions holomorphes sur U est une fonction holomorphe sur U, et on a*

$$(fg)' = fg' + gf'$$

Fait

- *Le quotient de deux fonction holomorphes f, g est holomorphe sur son domaine de définition, et on a*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

- *La composée de deux fonctions holomorphes est holomorphe sur son domaine de définition, et on a*

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)).g'(x)$$

Exemple

- *Les fonctions constantes et l'identité sont holomorphes.*
- *Par récurrence, les fonctions polynomiales sont holomorphes.*
- *Une fonction rationnelle est holomorphe sur son domaine de définition.*
- *La conjugaison complexe n'est pas holomorphe.*

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{\overline{z_0+h}-\overline{z_0}}{h} = \frac{\bar{h}}{h}$$

Si $h = ir$ alors la limite est -1, et si $h = r$, alors la limite est 1.

Théorème

Si $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$*, alors* f *est holomophe à l'intérieur de son disque de convergence, et on a*

$$f'(z) = \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}.$$

De même si $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n$*, alors* f *est holomophe à l'intérieur de son disque de convergence, et on a*

$$f'(z) = \sum_{n\geq 1} n a_n (z-z_0)^{n-1}.$$

Exemple: Les fonctions

$$z \mapsto e^z \qquad z \mapsto \sin z \qquad z \mapsto \cos z \qquad z \mapsto \cosh z \qquad z \mapsto \sinh z$$