Topologie und Mengenlehre – Einführung in die deskriptive Mengenlehre

Mitschrift der Vorlesung von Dr. Fares Maalouf an der Humboldt-Universität zu Berlin im WS 11/12

Mitgeschrieben von Aaron Schöpflin
Stephanie Brandl
Jane Knöchel
GeTEXt und ergänzt von Erik Ludwig

Vorwort des TEXenden

Dieses Skript entstand aus Mitschriften zu der Vorlesung „ Topologie und Mengenlehre – Einführung in die deskriptive Mengenlehre “, welche im Winterseester 2011/2012 von Dr. Fares Maalouf an der Humboldt Universität zu Berlin gehalten wurde. Diese Skript erhebt weder den Anspruch auf Vollständigkeit und noch dass es in jeder Form der Intention des Lesenden gerecht wird. Konkret ist es ein Skript, welche eigens verfasst wurde, um damit besser Lernen zu können. Daher hab ich auch nach eigenem ermessen Untersektionen verfasst, beweise abgeändert oder vervollständigt oder ähnliche Änderungen vorgenommen, die mir das Verstehen des Inhaltes erleichterten.

Dieses Skript ist vom eigentlichen Autor der Vorlesung, Herrn Dr. Fares Maalouf, nicht autorisiert, weswegen die Weitergabe des selbigen an Dritte mitunter bedenklich ist.

Viel Spaß beim Lesen und Lernen ;)

Erik Ludwig

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Überblick

In der folgenden Skript wird die Borel-Hierarchie und die zugehörige projektive Hierarchie näher untersucht, hierzu erst ein paar Erläuterungen und dann die Definitionen.

Sei X ein topologischer Raum. Die Borel σ-Algebra auf X ist die kleinste Menge, die alle offenen Mengen von X enthält und abgeschlossen bzgl. Komplementbildung und abzählbaren Vereinigung ist.

$\mathcal{B}(X) \subseteq \wp(X)$.

Man betrachte die Borel-Hierarchie

$$\begin{tikzcd}
\text{Menge aller offenen Mengen von } X \arrow[r, dash] & \Sigma^0_1 \arrow[d] & \Sigma^0_2 \arrow[d] & \Sigma^0_3 \arrow[d] & \dots & \Sigma^0_k \arrow[r, dash] & \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n,\ X_n \in \Pi^0_{k-1} \\
\text{Komplemente von } \Sigma^0_1 \arrow[r, dash] & \Pi^0_1 \arrow[ur] & \Pi^0_2 \arrow[ur] & \Pi^0_3 \arrow[ur] & \dots & \Pi^0_k \arrow[r, dash] & \text{Komplemente von } \Sigma^0_k
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\bigcup_{i<\omega} \Sigma^0_i \arrow[r, equal] & \Sigma^0_\omega \arrow[d] & \Sigma^0_{\omega+1} \arrow[d] & \Sigma^0_{\omega+2} \arrow[d] & \dots & \Sigma^0_{\omega+k} & \dots \\
 & \Pi^0_\omega \arrow[ur] & \Pi^0_{\omega+1} \arrow[ur] & \Pi^0_{\omega+2} \arrow[ur] & \dots & \Pi^0_{\omega+k} & \dots
\end{tikzcd}$$

Ab welchen α diese Hierarchie abbricht, daher $\Sigma^0_\alpha = \Sigma^0_{\alpha+1}$, hängt ganz von der Topologie ab. Im Falle der Polnischen Räume, die wir betrachten wollen, geschieht dies spätestens für $\alpha = \omega_1$.

Es folgt die genauere Definition.

Definition Sei X topologischer Raum. Wir definieren im folgenden induktiv die Σ^0_α und Π^0_α für jedes $\alpha < \omega_1$ durch:

Σ^0_1 sei die Menge der Offenen Mengen von X.

Für alle $\alpha < \omega_1$ seien die Π^0_α stets die Komplemente von Elementen aus Σ^0_α.

Für $\alpha > 1$ seien Σ^0_α die abzählbaren Vereinigungen von Elementen $X_i \in \Pi^0_{\beta_i}$ mit $\beta_i < \alpha$.

Definition Sei X ein topologischer Raum. X ist **separabel**, wenn es eine abzählbare Teilmenge von X gibt, die auch dicht in X liegt.

Beispiel $X = \mathbb{R}$ mit der Standartmetrik, dann liegt $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$.

Definition Sei X ein topologischer Raum. X sei **(vollständig) metrisierbar** genau dann, wenn es eine (vollständige) Metrik auf X gibt, welche die Topologie von X induziert.

Übung Sei $a_i = [0,1]$ für $i \in [0,1]$ dann ist $\prod_{i\in[0,1]} a_i$ nicht metrisierbar.

Definition Ein topologischer Raum heißt **polnischer Raum** genau dann wenn er vollständig metrisierbar und separabel ist.

Theorem 1.1
Sei X ein überabzählbarer polnischer Raum. Dann existiert für alle $\alpha < \omega_1$ ein $A \in \Pi^0_\alpha$ mit $A \notin \Sigma^0_\alpha$. Insbesondere gibt es für alle $\alpha < \omega_1$ ein $A \in \Sigma^0_{\alpha+1}$ mit $A \notin \Sigma^0_\alpha$. Daher die Hierarchie bricht erst mit $\alpha = \omega_1$ ab.

1.2 Mengenlehre

Wir haben im vorangegangenen Abschnitt von Ordinalzahlen und Mengenlehre Gebrauch gemacht und wohlen diese in den folgenden Abschnitten einführen.

Ein Beispiel dafür, dass ein naives Verständnis von einer Menge nicht ausreicht ist das folgende

Satz 1.2 (Russelsche Antinomie)
M seien beliebige Mengen, dann ist die Kollektion $X = \{M : M \notin M\}$ keine Menge.

Denn sei X eine Menge, so wäre $X \in X \Leftrightarrow X \notin X$, was widersprüchlich ist.

Ein Analogon aus der Logik wäre:

Die Annahme es gäbe ein Prädikat R, sodass für jedes Prädikat Q die Beziehung $R(Q)$ genau dann gilt, wenn $Q(Q)$ nicht gilt, ist widersprüchlich, denn $R(R)$ müsste gelten, genau dann wenn $R(R)$ nicht gelte.

Es wird darauf verzichtet die Mengenlehre axiomatisch einzuführen. Im folgenden werden wir nur einige der Axiome als Prinzipien zugrunde legen.

Prinzipien

- Sei A eine Menge und f eine Funktion, dann ist $f(A)$ auch eine Menge. (Ersetzungsaxiom)
- Wenn A eine Menge und P ein Prädikat, dann ist $\{X \in A : P(X)\}$ eine Menge (Aussonderungsaxiom)
- Zwei Mengen sind gleich genau dann, wenn sie die gleichen Elemente enthalten. (Extensionalität)
- A eine Menge, dann $\wp(A) = \{X : \forall t, t \in X \Rightarrow t \in A\}$ ist eine Menge. (Potenzmengenaxiom)
- Sei a eine Menge von Mengen $\bigcup_{X\in a} X = \{t : \exists X \in a : t \in X\}$ ist auch eine Menge. (Vereinigungaxiom)

Satz 1.3
Sei A eine Menge, dann gibt es keine surjektive Funktion von $A \to \wp(A)$

Beweis: durch Widerspruch:

Angenommen A sei eine Menge und $h : A \to \wp(A)$ sei eine surjektive Funktion.

Sei dann $M = \{X \in A : X \notin h(X)\}$. Nach dem Aussonderungsaxiom ist M eine Menge mit $M \subseteq A$. Folglich ist $M \in \wp(A)$ und da h surjektiv ist, gibt es ein m mit $h(m) = M$. Dies ist aber widersprüchlich da $m \notin M \iff m \notin h(m) \iff m \in M$. □

Korollar 1.4
Die Menge aller Mengen bzw. die Vereinigung aller Mengen ist keine Menge.

Beweis: Angenommen $\mathcal{U}$ sei die Vereinigung aller Mengen. Dann ist $\wp(\mathcal{U})$ eine Menge nach dem Potenzmengenaxiom. Aber $\wp(\mathcal{U})$ kann nicht in $\mathcal{U}$ enthalten sein, den dann wäre auch $\wp(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U}$ und es gäbe eine Surjektion von $\mathcal{U}$ nach $\wp(\mathcal{U})$. □

Theorem 1.5 (Cantor Bernstein)
Seien A, B Mengen, sodass es ein injektives $f : A \to B$ und ein injektives $g : B \to A$ gibt, dann gibt es bereits eine Bijektion zwischen A und B.

Beweis: Seien A,B, f und g wie oben. g ist eine Bijektion zwischen B und $g(B)$. Es reicht folglich eine Bijektion zwischen A und $g(B)$ zu finden. Sei also o.B.d.A. $B \subseteq A$ wir betrachten daher eigentlich $g(B)$ statt B, $g \circ f$ statt f und die Inklusion von $g(B)$ in A statt g.

Sei $h : A \to B$ gegeben durch

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{, falls } x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^n(A \setminus B) \\ x & \text{, sonst} \end{cases},$$

dann ist h eine gewünschte Bijektion. □

1.3 Ordnungen, Wohlordnungen und Ordinalzahlen

Definition Sei X eine Menge und R eine zweistellige Relation.

1) R ist eine **Ordnungsrelation** genau dann, wenn die folgende beiden Bedingungen gelten
   - (i) aus $R(x, y)$ und $R(y, x)$ folgt $x = y$
   - (ii) aus $R(x, y)$ und $R(y, z)$ folgt $R(x, z)$
2) R ist eine **strikte Ordnungsrelation** genau dann, wenn für alle x, y, z
   - (i) $\neg R(x, x)$
   - (ii) aus $R(x, y)$ und $R(y, z)$ folgt $R(x, z)$

   Notation: Wir schreiben $R(x, y)$ auch $x \leq y$, wenn R Ordnungsrelation und $x < y$, wenn R strikte Ordnungsrelation ist.

Definition (Totale Ordnung) Sei $(A, \leq)$ eine geordnete Menge.

A ist **total geordnet**, wenn für jedes Paar $x, y \in A$ die Relation $x \leq y$ oder $y \leq x$ gilt.

Sei $(A, \leq)$ eine geordnete Menge.

- $a \in A$ heißt **minimales Element**, falls jedes $b \in A \setminus \{a\}$ nicht kleiner als a ist, daher $\neg(b \leq a)$ gilt.
- $a \in A$ heißt **kleinstes Element** (von A) genau dann, wenn für jedes b in A auch a kleiner ist als b, daher $a \leq b$ gilt.
- Sei $B \subseteq A$ und $b \in A$. b heißt **untere Schranke von** B genau dann wenn b kleinstes Element von $\{b\} \cup B$ ist.
- $B \subseteq A$ und $b \in A$. b heißt **größte untere Schranke von** B genau dann, wenn b das größte Element der unteren Schranken ist.

Analog definiert man **größtes Element**, **maximales Element**, **obere Schranke** und **kleinste obere Schranke von** B

Definition $(A, \leq)$ heißt **wohlgeordnet**, wenn jede nicht-leere Teilmenge $B \subseteq A$ ein kleinstes Element enthält.

Beispiel $(\mathbb{N}, \leq)$ ist wohlgeordnet. $(\mathbb{R}^+, \leq)$ und $(\mathbb{Q}^+, \leq)$ nicht.

Definition (Anfangsstück) Sei $(A, \leq)$ eine geordnete Menge und $B \subseteq A$. B heißt **Anfangsstück von** A genau dann, wenn für jedes x aus B auch jedes kleinere y aus A bereits zu B gehört, daher $\forall x \in B \forall y \in A : y \leq x \to y \in B$.

Beispiel In $(\mathbb{R}, \leq)$ ist für $a \in \mathbb{R}$ sowohl $(-\infty, a)$ als auch $(-\infty, a]$ Anfangsstück von $\mathbb{R}$.

Notation Sei $(A, \leq)$ geordnete Menge und $a \in A$.

$$S_a(A) := \{x \in A \mid x < a\} = \{x \in A \mid x \leq a \wedge x \neq a\}$$

Bemerkung $S_a(A)$ ist für jedes $a \in A$, wegen der Transitivität von $\leq$, ein Anfangsstück von A.

Lemma 1.6
Sei $(A, \leq)$ eine wohlgeordnete Menge und B ein Anfangsstück von A, dann ist $A = B$ oder aber es gibt ein $a \in A$ sodass $B = S_a(A)$.

Beweis: Für $B = A$ stimmt die Aussage. Angenommen $B \neq A$, dann ist $A \setminus B \neq \emptyset$ und da A wohlgeordnet ist gibt es ein kleinstes Element a in $A \setminus B$. Zeigen dass $S_a(A) = B$:

$S_a(A) \subseteq B$ Sei $x \in S_a(A)$, dann ist $x < a$. Die Annahme $x \notin B$ ist widersprüchlich, denn dann wäre $x \in A \setminus B$ mit $x < a$ und dann könnte a nicht das kleinste Element von $A \setminus B$ gewesen sein.

$S_a(A) \supseteq B$ Andererseits sei $x \in B$. Die Menge $\{a, x\}$ hat ein kleinstes Element, daher entweder $x < a$ oder aber $a < x$. Im ersten Falle wäre $x \in S_a(A)$ und wir sind fertig. Die Annahme $a < x$ ist widersprüchlich, denn da B Anfangsstück ist und $x \in B$, müsste dann auch $a \in B$ liegen, welches nach Voraussetzung aber in $A \setminus B$ liegt. $\square$

Definition (Ordinalzahl) Sei α eine Menge, α ist eine **Ordinalzahl** genau dann, wenn

- $(\alpha, \in)$ ist eine strikte Wohlordnung
- für jedes $x \in \alpha$ gilt auch $x \subseteq \alpha$.

Beispiel $\underbrace{\emptyset}_{=\alpha_0}, \underbrace{\{\emptyset\}}_{=\alpha_1}, \underbrace{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}}_{=\alpha_2}, \underbrace{\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}}_{=\alpha_3}$, $\alpha_n := \{\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}\}$ und $\omega := \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ sind alles Ordinalzahlen. $\omega \cup \{\omega\}$ ist eine Ordinalzahl und heißt $\omega + 1$.

Lemma 1.7
Sei α eine Ordinalzahl. Dann sind die Anfangsstücke von α entweder gleich α oder genau die Elemente von α.

Beweis: Sei A ein Anfangsstück von α. Für $A = \alpha$ sind wir fertig. Sei daher $A \neq \alpha$. Da $\in$ eine Wohlordnung auf α ist, gibt es ein $a \in \alpha$ mit $A = S_a(\alpha)$. Es gilt aber da α Ordinalzahl ist auch $a \subseteq \alpha$ und somit

$$A = S_a(\alpha) = \{x \in \alpha : x < a\} = \{x \in \alpha : x \in a\} = \alpha \cap a = a$$

Folglich ist jedes echte Anfangsstück von α eine Element von α.

Umgekehrt sei $a \in \alpha$, es ist zu zeigen, dass a ein Anfangsstück ist von α ist. Da $a \subseteq \alpha$ gilt wie oben:

$$a = \alpha \cap a = \{x \in \alpha : x \in a\} = \{x \in \alpha : x < a\} = S_a(\alpha)$$

daher a ist ein Anfangsstück. $\square$

Lemma 1.8
Sei α eine Ordinalzahl, dann sind die Elemente von α auch Ordinalzahlen.

Beweis: Sei $\beta \in \alpha$. Nach Definition einer Ordinalzahl ist $\beta \subseteq \alpha$. Folglich ist $\in$ ebenfalls Wohlordnung auf β da sie bereits Wohlordnung auf α. Es bleibt zu zeigen, dass für jedes $x \in \beta$ auch $x \subseteq \beta$.

Sei $x \in \beta$ beliebig. Da $\beta \in \alpha$ und α Ordinalzahl, gilt auch $\beta \subseteq \alpha$ und somit $x \in \alpha$. Folglich gilt auch $x \subseteq \alpha$ und folglich ist für jedes $y \in x$ auch $y \in \alpha$. Da $\in$ eine Ordnungsrelation auf α ist, folgt dann auch aus $y \in x$ und $x \in \beta$ nach Transitivität, dass $y \in \beta$, also $x \subseteq \beta$. $\square$

Lemma 1.9
Sei α eine Ordinalzahl, dann ist $\alpha \notin \alpha$.

> **Beweis:** $\in$ ist strikte Ordnungsrelation auf α, daher es gilt für alle $\beta \in \alpha$ auch $\beta \notin \beta$. Insbesondere wäre $\alpha \in \alpha$, so würde daraus $\alpha \notin \alpha$ folgen, was widersprüchlich ist. Folglich kann nur $\alpha \notin \alpha$ gelten. □

Lemma 1.10
Seien α und β Ordinalzahlen, dann ist entweder $\alpha = \beta$, $\beta \in \alpha$ oder $\alpha \in \beta$.

Beweis: Sei $\delta = \alpha \cap \beta$.

- δ ist ein Anfangsstück von α und β.
  - i) δ ist Anfangsstück von α, denn seien $x \in \delta$ und $y <_\alpha x$ beliebig. Dann ist nach Definition von „$<_\alpha$" $y \in x$ und da $x \in \delta$ folgt $x \in \alpha$ und da $x \subseteq \alpha$ folgt auch $y \in \alpha$. Analog folgt $y \in \beta$ und folglich $y \in \delta = \alpha \cap \beta$.
  - ii) in analoger Weise zeigt man, dass δ Anfangsstück von β
- Insbesondere ist δ Ordinalzahl und somit $\delta \notin \delta$
- δ ist Anfangsstück von α also $\delta = \alpha$ oder $\delta \in \alpha$
- δ ist Anfangsstück von β also $\delta = \beta$ oder $\delta \in \beta$

Daraus ergeben sich genau vier Fälle:

Fall 1: $\alpha = \delta = \beta$ dann ist $\alpha = \beta$

Fall 2: $\alpha = \delta \in \beta$, dann ist $\alpha \in \beta$

Fall 3: $\beta = \delta \in \alpha$, dann ist $\beta \in \alpha$

Fall 4: $\delta \in \alpha$ und $\delta \in \beta$, dann ist $\delta \in \delta$, was widersprüchlich ist. Daher kann dieser Fall ausgeschlossen werden.

Es gilt noch zu zeigen, dass die Fälle 1 bis 3 sich einander ausschließen.

- Angenommen es gelte $\alpha \in \beta$ und $\beta \in \alpha$. Dann ist auch $\alpha \subseteq \beta$ und somit $\beta \in \beta$, was widersprüchlich ist.
- Angenommen es gelte $\alpha \in \beta$ und $\beta = \alpha$, dann gilt sofort $\alpha \in \alpha$ Ψ
- Analoges gilt für $\beta \in \alpha$ und $\beta = \alpha$.

Es gilt also immer genau eine der Aussagen $\alpha \in \beta$, $\beta \in \alpha$ oder $\alpha = \beta$ □

Bemerkung Wir haben damit bewiesen, dass $\in$ über den Ordinalzahlen eine strikte, totale Ordnungsrelation definiert.

Lemma 1.11
Sei $A \neq \emptyset$ eine Menge von Ordinalzahlen, dann hat A ein kleinstes Element bzgl. $\in$.

Beweis: Da $A \neq \emptyset$ gibt es ein $\alpha \in A$. Im Falle, dass $\alpha \cap A = \emptyset$ so ist α das Kleinste Element, denn aus $x \in A$ folgt $x \notin \alpha$ und folglich muss $\alpha \in x$ oder $\alpha = x$ gelten.

Falls $A \cap \alpha \neq \emptyset$ ist $\alpha \cap A \subseteq \alpha$ und hat wegen der Wohlordnung auf α ein Kleinstes Element $\alpha_0 \in \alpha \cap A$.

Zeigen mittels Widerspruch, dass α_0 dann das kleinste Element von A sein muss.

Angenommen α_0 wäre nicht das kleinste Element von A, dann existiert ein $\beta \in A$ mit $\beta < \alpha_0$ bzw. $\beta \in \alpha_0$. Da auch $\alpha_0 \in \alpha$ und folglich $\alpha_0 \subseteq \alpha$ ist auch $\beta \in \alpha$. Dann ist $\beta \in A \cap \alpha$ und $\beta < \alpha_0$ und damit α_0 nicht kleinstes Element von $A \cap \alpha$. $\square$

Lemma 1.12
Sei α eine Ordinalzahl und $\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$. Dann ist $\alpha + 1$ die kleinste Ordinalzahl, die strikt größer ist als α.

Beweis: wird als Übung gelassen.
Der Vollständigkeit zu Liebe wurde der Beweis ergänzt:

- *Zeigen zuerst, dass $\alpha + 1$ eine Ordinalzahl ist.*
  - *Zeigen dafür $\in$ ist eine Ordnungsrelation auf $\alpha + 1$.*

    $\in$ ist eine totale, strikte Ordnungsrelation auf den Ordinalzahlen und damit auch auf jeder Menge von Ordinalzahlen insbesondere auf $\alpha+1 = \alpha \cup \{\alpha\}$.
  - *Zeigen $\alpha + 1$ ist durch $\in$ Wohlgeordnet.*

    Da α Ordinalzahl und die Elemente einer Ordinalzahl auch wieder Ordinalzahlen sind, ist jede Teilmenge von $\alpha+1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ eine Menge von Ordinalzahlen. Diese Enthält nach obigen Lemma bzgl. $\in$ ein kleinstes Element.
  - *Zeigen dass für jedes $x \in \alpha + 1$ ist $x \subseteq \alpha + 1$.*

    Für $x \in \alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ ist $x = \alpha$ oder $x \in \alpha$. Falls $x = \alpha$ ist $x = \alpha \subseteq \alpha \cup \{\alpha\}$ klar. Andernfalls für $x \in \alpha$ folgt, da α Ordinalzahl und somit $x \subseteq \alpha \subseteq \alpha + 1$.
- *$\alpha + 1$ ist wegen $\alpha \in \alpha + 1$ strikt größer.*
- *$\alpha + 1$ ist die kleinste Ordinalzahl die strikt größer als α.*

  Angenommen es gäbe eine kleinere Ordinalzahl β die strikt größer als α, dann wäre $\alpha \in \beta \in \alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$. Wegen $\beta \in \alpha \cup \{\alpha\}$ wäre $\beta = \alpha$ oder $\beta \in \alpha$ dies ist aber beides bereits ausgeschlossen, da $\alpha \in \beta$ gelten soll und nur eines gelten kann. $\square$

Bemerkung Für Ordinalzahlen α und β gilt

- $\alpha < \beta$ bedeutet $\alpha \in \beta$. Man definiert $\alpha \leq \beta$ als $\alpha \in \beta$ oder $\alpha = \beta$.
- $\alpha \leq \beta$ genau dann, wenn $\alpha \subseteq \beta$.

  Denn wenn $\alpha \leq \beta$ so ist $\alpha = \beta$ oder $\alpha \in \beta$. Im ersten Falle ist $\alpha \subseteq \beta$ trivial. Im Zweiten Falle folgt $\alpha \subseteq \beta$ da β Ordinalzahl.

  Andersherum sei $\alpha \subseteq \beta$. Würde $\neg(\alpha \leq \beta)$ gelten, so würde $\beta \in \alpha$ gelten, was aber mit $\alpha \subseteq \beta$ zum Widerspruch $\beta \in \beta$ führt.

Lemma 1.13
Sei X eine Menge von Ordinalzahlen. Dann ist $\beta = \bigcup_{\alpha \in X} \alpha$ eine Ordinalzahl und die kleinste obere Schranke von X.

Beweis: wird auch als Übung gelassen.
Beweis wurde ergänzt:
Sei β wie oben. Wir zeigen zuerst, dass β Ordinalzahl.
β ist eine Menge von Ordinalzahlen, da die Elemente von Ordinalzahlen selbst wieder Ordinalzahlen sind. Jede Menge von Ordinalzahlen ist durch $\in$ total und strikt geordnet. Jede Menge von Ordinalzahlen enthält ein kleinstes Element und so auch jede Teilmenge von β. β ist also durch $\in$ wohlgeordnet.
Sei $x \in \beta$ es gilt zu zeigen, dass $x \subseteq \beta$. Da $x \in \beta$ gibt es ein $\alpha \in X$ mit $x \in \alpha$. Da α Ordinalzahl, gilt $x \subseteq \alpha \subseteq \beta$ und somit ist β eine Ordinalzahl.
Zu zeigen ist, dass β kleinste obere Schranke von X ist. Da für alle $\alpha \in X$ auch $\alpha \subseteq \beta$ gilt und dies Äquivalent zu $\alpha \leq \beta$ ist, ist β eine obere Schranke.
Angenommen es gäbe eine kleinere obere Schranke γ von X. Dann würde $\gamma \in \beta$ gelten müssen und für jedes $\alpha \in X$ wäre auch $\alpha \leq \gamma$ bzw. $\alpha \subseteq \gamma$. Da $\gamma \in \beta$ gäbe es ein α^* mit $\gamma \in \alpha^*$. Aus $\alpha^* \subseteq \gamma$ folgt dann der Widerspruch $\gamma \in \gamma$.
β ist also kleinste obere Schranke.

Definition Sei α eine Ordinalzahl.
Wir nennen $\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$ den **Nachfolger von** α und α den **Vorgänger von** $\alpha + 1$.
α heißt **Limeszahl** oder **Limesordinalzahl** genau dann, wenn $\alpha \neq \emptyset$ und es kein β gibt, sodass α der Nachfolger von β ist.

Beispiel $\{\emptyset\}$ ist der Nachfolger von $\emptyset = \alpha_0$ und der Vorgänger von $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. $\alpha_{n+1} := \alpha_n \cup \{\alpha_n\}$ ist Nachfolger von α_n. $\omega = \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Limeszahl.

Lemma 1.14
Sei λ eine Limeszahl, dann ist $\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} \alpha$

Beweis:

$\bigcup_{\alpha<\lambda} \alpha \subseteq \lambda$: Wenn $\alpha < \lambda$ so ist $\alpha \in \lambda$ und da λ Ordinalzahl ist, gilt $\alpha \subseteq \lambda$. Folglich gilt auch $\bigcup_{\alpha<\lambda} \alpha \subseteq \lambda$.

$\lambda \subseteq \bigcup_{\alpha<\lambda} \alpha$**:** Sei $x \in \lambda$ dann ist $x < \lambda$ und $x+1 \leq \lambda$. Da λ Limeszahl gilt $x+1 \neq \lambda$ und somit $x+1 < \lambda$. Dann ist $x+1 \subseteq \bigcup_{\alpha<\lambda} \alpha$ und somit $x \in \bigcup_{\alpha<\lambda} \alpha$. □

Notation Wir bezeichnen mit $\mathcal{O}_n$ die Kollektion der Ordinalzahlen.

Bemerkung $\mathcal{O}_n$ ist keine Menge, denn sonst wäre $\mathcal{O}_n$ eine Ordinalzahl und $\mathcal{O}_n \in \mathcal{O}_n$ was widersprüchlich ist.

Sei A eine Menge, dann existiert keine injektive Funktion $f : \mathcal{O}_n \to A$ sonst gäbe es $f^{-1} : A \to \mathcal{O}_n$ und $f^{-1}(A) = \mathcal{O}_n$ und $\mathcal{O}_n$ wäre Menge nach dem Ersetzungsaxiom.

Lemma 1.15
Seien α und β Ordinalzahlen und $f : \alpha \to \beta$ eine streng monoton wachsende Funktion, d.h. $x < y \implies f(x) < f(y)$. Dann ist $x \leq f(x)$ für jedes $x \in \alpha$ und es gilt $\alpha \leq \beta$

$x \leq f(x)$ Angenommen es gäbe ein $x \in \alpha$ mit $f(x) < x$ dann gibt es wegen der Wohlordnung auch ein kleinstes $x_0 \in \alpha$ mit $f(x_0) < x_0$. Wegen der Monotonie wäre dann aber $f(f(x_0)) < f(x_0) < x_0$ und x_0 könnte nicht minimal gewesen sein.

$\alpha \leq \beta$ Da $\alpha \subseteq \beta$ Äquivalent zu $\alpha \leq \beta$ reicht es ersteres zu zeigen.

Sei $x \in \alpha$ dann ist $x \leq f(x)$ und $f(x) \in \beta$ daher $f(x) < \beta$ in $\beta + 1$ folgt wegen Transitivität $x \in \beta$.

Theorem 1.16
Seien α und β Ordinalzahlen und $f : \alpha \to \beta$ ein Ordnungsisomorphismus, daher Bijektiv und streng monoton wachsend, dann folgt $\alpha = \beta$ und $f = \mathrm{id}_\alpha$

Beweis: Wegen f streng monoton wachsend folgt, $\alpha \leq \beta$ und $x \leq f(x)$ für $x \in \alpha$. Da f Isomorphismus, ist f bijektiv und $f^{-1} : \beta \to \alpha$ ist auch ein Isomorphismus. Dann ist f^{-1} auch streng monoton wachsend und folglich $\beta \leq \alpha$ und $x \leq f^{-1}(x)$ für alle $x \in \beta$ bzw. wegen Monotonie von f auch $f(x) \leq x$ für alle $x \in \beta$. Insgesamt folgt $\alpha = \beta$ und $x = f(x)$ für alle $x \in \beta = \alpha$ und somit $f = \mathrm{id}_\alpha$. □

Theorem 1.17
Sei $(A, <)$ eine Wohlgeordnete Menge. Dann existiert genau eine Ordinalzahl α so dass $(A, <)$ zu $(\alpha, \in)$ Ordnungsisomorph.

Beweis: Eindeutigkeit Sei $f : A \to \alpha$ ein Ordnungsisomorphismus. Angenommen es gäbe noch ein zweites $\beta \neq \alpha$ mit $g : A \to \beta$ auch Ordnungsisomorphismus, dann wäre $f \circ g^{-1} : \beta \to \alpha$ ein Ordnungsisomorphismus zwischen α und β. Dann ist aber $\alpha = \beta$ im Widerspruch zur Annahme.

Existenz Sei

$$\Gamma = \{x \in A : S_x(A) \text{ ist isomorph zu einer Ordinalzahl } \beta(x)\}$$

Nach Eindeutigkeit ist für jedes $x \in \Gamma$ das $\beta(x)$, welches zu dem $S_x(A)$ isomorph ist, eindeutig bestimmt.

Zeigen dass Γ Anfangsstück von A ist und zeigen dass dann Γ kein echtes Anfangsstück sein kann, daher $\Gamma = A$.

Sei $x \in \Gamma$ und $y < x$. Da $x \in \Gamma$ gilt $S_x(A) \simeq \beta(x)$. $S_y(A)$ ist Anfangsstück von $S_x(A)$ somit ist $S_y(A)$ isomorph zu einem Anfangsstück von $\beta(x)$. Die Anfanstücke einer Ordinalzahl sind auch wieder Ordinalzahlen und somit ist $S_y(A)$ isomorph zu $\beta(y)$ und somit $y \in \Gamma$. Damit ist Γ ein Anfangsstück von A.

Wir haben gezeigt, dass für $x, y \in \Gamma$ mit $y < x$ gilt auch $\beta(y) < \beta(x)$ daher $\beta : \Gamma \to \mathcal{O}_n$ ist streng monoton wachsend und daher injektiv.

Sei δ die Kleinste Ordinalzahl die alle die $\beta(x)$ für $x \in \Gamma$ enthält ($\delta = \bigcup_{x\in\Gamma}(\beta(x) + 1)$). Zeigen $\beta : \Gamma \to \delta$ ist surjektiv. Sei $\alpha \in \delta$, dann gibt es ein $x_0 \in \Gamma$, sodass $\alpha \leq \beta(x_0)$, denn andernfalls wäre δ nicht minimal gewählt gewesen. Falls $\alpha = \beta(x_0)$ so sind wir fertig. Andernfalls ist $S_{x_0}(A)$ isomorph zu $\beta(x_0)$ und wegen $\alpha < \beta(x_0)$ auch α isomorph zu einem echten Anfangsstück von $\beta(x_0)$. Dieses ist isomorph zu einem echten Anfangsstück von $S_{x_0}(A)$ und somit zu einem $S_y(A)$ mit $y < x$. Folglich ist $\alpha = \beta(y)$.

Somit ist $\beta : \Gamma \to \delta$ ein Isomorphismus. Γ ist Anfangsstück von A. Angenommen $\Gamma \neq A$, dann gibt es ein kleinstes Element θ in $A \backslash \Gamma$ und $\Gamma = S_\theta(A)$. $S_\theta(A)$ ist aber nun isomorph zu einer Ordinalzahl δ also $\theta \in \Gamma = \{x \in A : x < \theta\}$, was widersprüchlich ist. Demnach kann nur $\Gamma = A$ sein und A ist isomorph zu δ. □

Definition Sei C eine Kollektion die keine Menge ist und $\leq$ eine zweistellige Relation auf C. $(C, \leq)$ sei eine **wohlgeordnete Kollektion** genau dann, wenn jedes echte Anfangsstück von C eine Menge ist und $\leq$ eine Wohlordnung auf dieser Menge.

Theorem 1.18
Sei $(C, \leq)$ eine Wohlgeordnete Kollektion, die keine Menge ist. Dann ist $(C, \leq)$ isomorph zu $(\mathcal{O}_n, \leq)$

Beweis:

- Zu jedem x in C ist $S_x(C)$ eine Wohlgeordnete Menge die zu einer Eindeutigen Ordinalzahl $F(x)$ isomorph ist.
- Wie schon im Beweis für Mengen ist $F(x)$ streng monoton wachsend, surjektiv und die Kollektion $\mathcal{K}$ die alle $F(x)$ enthält ist ein Anfangsstück von $\mathcal{O}_n$.

- Wäre $\mathcal{K} \neq \mathcal{O}_n$, dann wäre $\mathcal{K} = \alpha$ für eine Ordinalzahl α. Dann aber wäre F eine Injektion von einer Kollektion die keine Menge ist auf eine Menge, was widersprüchlich ist.
- Also $\mathcal{K} = \mathcal{O}_n$ und somit ist $F : (C, \leq) \to (\mathcal{O}_n, \leq)$ ein Isomorphismus. $\square$

In $\mathbb{N}$ gibt es das Prinzip der induktiven Definition, Zum Beispiel $a_0 := x \in A$, $a_{n+1} := f(a_n)$ bzw, allgemeiner $a_{n+1} := f(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0)$ für irgendeine Funktion f auf dem Bereich

$$A^{<\omega} = \{(a_0, \ldots, a_k) \in A^k : k < \omega\}$$

1.4 induktive Funktionen, Auswahlaxiom

Beispiel Fibonacci Folge

$$a_0 := 0 \in \mathbb{N}, a_1 := 1 \in \mathbb{N}, a_{n+1} := a_n + a_{n-1} = f(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0)$$

Dieses Prinzip wollen wir jetzt auf Anfangsstücken von $\mathcal{O}_n$ verallgemeinern.

Definition Sei H eine Funktion und α eine Ordinalzahl und f eine Funktion vom Bereich α.

f heißt **H-Induktiv** genau dann, wenn für jedes $\beta \in \alpha$ auch $f\mid_\beta$ im Bereich von H liegt und $f(\beta) = H(f\mid_\beta)$ ist.

Bemerkung H ist in diesem Falle unsere Rekursionsvorschrift und f die zu konstruierende Folge, welche sich wie folgt auch als Menge auffassen lässt:

Sei $f : A \to B$ eine Funktion und A eine Menge, f ist durch seinen Graph

$$\{(x, f(x)) : x \in A\}$$

definiert.

Theorem 1.19
Sei H eine Funktion, α eine Ordinalzahl und f und g seien H-induktive Funktion von Bereich α. Dann ist $f\mid_\alpha = g\mid_\alpha$ daher für jedes $\beta \in \alpha$ ist $f(\beta) = g(\beta)$.

Beweis: Seien f und g H-induktive Funktionen vom Bereich α. Angenommen es gäbe ein $\beta \in \alpha$ mit $f(\beta) \neq g(\beta)$. Dann gibt es ein kleinstes $\beta_0 \in \alpha$ mit $f(\beta_0) \neq g(\beta_0)$. dann gilt aber für alle $\gamma \in \beta_0$ dass $f(\gamma) = g(\gamma)$ und daher $f\mid_{\beta_0} = g\mid_{\beta_0}$ und folglich:

$$f(\beta_0) = H(f\mid_{\beta_0}) = H(g\mid_{\beta_0}) = g(\beta_0)$$

was im Widerspruch zur Definition von β_0 steht. $\square$

Theorem 1.20
Sei H eine Funktion und α eine Ordinalzahl, sodass jede H-induktive Funktion f vom Bereich $\beta < \alpha$ liegt im Bereich von H. Dann existiert genau eine H-induktive Funktion vom Bereich α.

Beweis: *Aufgrund von Lücken in den Aufzeichnungen, stimmt der Beweis möglicherweise nicht mit dem im Skript überein.*

Die Eindeutigkeit folgt aus dem vorangegangenen Theorem. Sei

$$\Gamma = \{x \in \alpha : \text{ es gibt eine } H\text{-induktive Funktion } f_x \text{ vom Bereich } x\}$$

Zeigen wieder zuerst dass Γ Anfangsstück von α.

Sei hierzu $x \in \Gamma$ und $y < x$, dh. $y \in x$. Sei f_x die eindeutig bestimmte H-induktive Funktion vom Bereich x. Nach Definition von H-induktiv gilt auch $f_x \mid_y$ liegt im Bereich von H und ist H-induktiv. Dann ist aber $y \in \Gamma$.

Falls $\alpha = \Gamma$ so sind wir fertig.

Sei $\Gamma \neq \alpha$ dann ist $\alpha \setminus \Gamma$ nicht leer und hat ein kleinstes Element x_0. Da Γ ein Anfangsstück ist, gilt $x_0 = \Gamma$.

Falls x_0 Limeszahl, dann gibt es da x_0 minimal für jedes $y < x_0$ eine H-induktive Funktion f_y. Da für $y < x_0$ auch $y + 1 < x_0$ definiere man $f(y) := f_{y+1}(y)$ und wegen der Eindeutigkeit stimmt dann $f \mid_\beta$ mit f_β für alle $\beta < x_0$ überein. Dann aber ist f auch H-induktiv von Bereich x_0 und $x_0 \in \Gamma$. Ψ

Falls x_0 Nachfolger ist, so ist $x_0 = y + 1$ für ein y. Da x_0 minimal ist, folgt $y \in \Gamma$ und dementsprechend gibt es eine H-induktive Funktion f_y vom Bereich y. Nach Voraussetzung liegt aber jede H-induktive Funktion vom Bereich $y < \alpha$ im Bereich von H. Damit lässt sich f_y durch folgendes f_{x_0} fortsetzen: $f_{x_0}(y) := H(f_y)$ und $f_{x_0}(z) := f_y(z)$ für alle $z < y$. Gemäß Definition ist dann f_{x_0} eine H-induktive Funktion vom Bereich x_0 und somit $x_0 \in \Gamma$. Ψ

Folglich muss $\alpha = \Gamma$ sein. □

Theorem 1.21
Sei H eine Funktion, sodass jede H-induktive Funktion im Bereich von H liegt. Dann gibt es eine einzige H-induktive Funktion vom Bereich $\mathcal{O}_n$.

Beweis: Sei α eine Ordinalzahl. Dann liegt jede H-induktive Funktion vom Bereich α im Bereich von H Dann gibt es eine einzige H-induktive Funktion f_α vom Bereich α. Sei F eine Funktion vom Bereich $\mathcal{O}_n$ man setze $F(\alpha) := H(f_\alpha)$. Man kann zeigen, dass F H-induktiv ist.
F ist eindeutig, denn angenommen es gibt eine zweite H-induktive Funktion G vom Bereich $\mathcal{O}_n$, mit $F \neq G$. Dann gibt es eine Ordinalzahl α, sodass $F(\alpha) \neq G(\alpha)$. Aber dann sind $F \mid_{\alpha+1}$ und $G \mid_{\alpha+1}$ verschiedene H-induktive Funktionen vom Bereich $\alpha + 1$. Ψ

Definition Sei $(A, \leq)$ eine geordnete Menge.
$B \subseteq A$ heißt **Kette** wenn $\leq$ eine totale Ordnung auf B ist.
$(A, \leq)$ heißt **induktiv**, wenn jede Kette von A nach oben beschränkt ist.

(1) Auswahlaxiom: Für jede Menge A existiert eine Funktion $g : \wp(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$ so dass für jedes $x \subseteq A$ auch $g(x) \in x$.

(2) Axiom von Zorn: Jede induktive Menge besitzt ein maximales Element.

(3) Axiom von Zermelo: Für jede Menge A, kann man auf A eine Wohlordnung definieren.

Theorem 1.22
die Obigen drei Axiom sind alle Äquivalent.

Beweis: (1) $\implies$ (2) Sei A induktive Menge. Wir setzten voraus, dass A kein maximales Element hat.

Wegen (1) gibt es eine Auswahlfunktion $g : \wp(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$ mit $g(X) \in X$. Für jede Teilmenge $B \subseteq A$ sei $M(B) := \{x \in A : \forall y \in B : x > y\}$ die Menge der echten oberen Schranken von B. Für eine Funktion f mit $\mathrm{Im}(f) \subseteq A$ sei $H(f) := g(M(\mathrm{Im}(f)))$ es gilt Folglich $H(f) \in A$ und $H(f) > x \in \mathrm{Im}(f)$. f liegt nur dann nicht im Bereich von H, wenn $M(\mathrm{Im}(f)) = \emptyset$, es also keine oberen Schranken zum Bild von f gibt.

Sei α eine Ordinalzahl und f eine H-induktive Funktion vom Bereich α. Es gilt $\mathrm{Im}(f) \subseteq A$, weil für $\beta \in \alpha$ ist $f(\beta) = H(f\mid_\beta) \in A$. Sei $\beta < \gamma < \alpha$ dann ist

$$f(\gamma) = H(f\mid_\gamma) = g(M(\mathrm{Im}(f\mid_\gamma)))$$

und folglich, da $f(\beta) \in \mathrm{Im}(f\mid_\gamma)$ gilt $f(\gamma) > f(\beta)$. Damit ist das Bild von f eine Kette und f ist Injektiv.

Wir zeigen dass f im Bereich von H liegt. Dies ist genau dann der Fall, wenn $M(\mathrm{Im}(f)) \neq \emptyset$. Da $\mathrm{Im}(f)$ Kette ist und A induktiv, ist $\mathrm{Im}(f)$ nach oben durch ein $a \in A$ beschränkt. Da A kein maximales element hat muss es ein $b \in A$ geben mit $b > a$ und wegen $\forall x \in \alpha : f(x) \leq a < b$ ist b eine echte obere Schranke von $\mathrm{Im}(f)$ und folglich $b \in M(\mathrm{Im}(f))$.

Dann liegt aber jede H-induktive Funktion im Bereich von H und es gibt eine H-induktive Funktion $F : \mathcal{O}_n \to A$. Dann ist aber F injektiv, denn für $\alpha < \beta$ ist $F\mid_{\beta+1}$ H-induktiv und wegen der strengen Monotonie gilt

$$F(\alpha) = F\mid_{\beta+1}(\alpha) \overset{<}{\neq} F\mid_{\beta+1}(\beta) = F(\beta).$$

Da A eine Menge ist, $\mathcal{O}_n$ aber nicht, ergibt sich der Widerspruch.

(3) $\implies$ (1) Sei A eine Menge und $\leq$ eine Wohlordnung auf A. Eine Auswahlfunktion $g : \wp(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$ lässt sich definieren durch $g(X) := \min(X)$.

(2) $\implies$ (3) Sei A eine Menge. Sei

$$B := \{(X, \leq_X) : X \subseteq A \text{ und } \leq_X \text{ ist Wohlordnung auf } X\}$$

Man kann auf B eine Ordnung $\leq$ definieren in dem man sagt $(X, \leq_X) \leq (Y, \leq_Y)$ genau dann, wenn $(X, \leq_X)$ ein Anfangsstück von $(Y, \leq_Y)$ und für jedes Paar $a, b \in X$ gilt $a \leq_X b$ genau dann, wenn $a \leq_Y b$ gilt.

- B ist nicht Leer, denn $(\emptyset, \emptyset) \in B$.
- $\leq$ ist Ordnungsrelation auf B
- jede Kette von B ist nach oben beschränkt, denn Sei $\{(X_i, \leq_{X_i})\}_{i \in I}$ eine Kette, dann sei $Y = \bigcup_{i \in I} X_i$ und für $a, b \in Y$ sei $a \leq_Y b$ genau dann, wenn für $a \leq_{X_i} b$ für ein X_i mit $a, b \in X_i$ und ein solches X_i existiert immer. $(Y, \leq_Y)$ ist dann obere Schranke.
- Folglich ist B eine induktive Menge und hat nach (2) auch ein Maximales Element $(M, \leq_M)$.

Es muss $M = A$ gelten, denn sonst sei $a \in A \setminus M$ und $(M, \leq)$ ist nach oben durch $(M \cup \{a\}, \leq_{M \cup \{a\}})$ beschränkt. Dabei ist $(M \cup \{a\}, \leq_{M \cup \{a\}})$ gegeben durch $x \leq_{M \cup \{a\}} y$ genau dann, wenn $y = a$ oder $y, x \in M$ und $x \leq_M y$. Man zeige dann noch, dass $\leq_{M \cup \{a\}}$ eine Wohlordnung auf $M \cup \{a\}$ ist. $\square$

1.5 Kardinalzahlen

Bemerkung Aus dem Axiom von Zermelo folgt, dass es von jeder Menge A eine Bijektion auf eine Ordinalzahl α gibt. Wegen der Wohlordnung auf $\mathcal{O}_n$ gibt es ein kleinstes α, sodass eine Bijektion $f : A \xrightarrow{\sim} \alpha$ existiert. Wir werden dieses α die Mächtigkeit von A nennen (geschrieben $|A| = \alpha$).

Definition Eine Ordinalzahl α ist **Kardinalzahl**, wenn es zu jeder kleineren Ordinalzahl β keine Bijektion $f : \alpha \to \beta$ gibt.

Sei A eine Menge. Wir nennen die Kardinalzahl κ die **Mächtigkeit von** A, wenn es eine Bijektion $f : A \to \kappa$ gibt. Dann schreiben wir auch $|A| = \kappa$.

Bemerkung Die Kardinalzahlen sind genau die Ordinalzahlen κ mit $|\kappa| = \kappa$

Im folgenden sei $\mathcal{C}_n$ die Kollektion der Kardinalzahlen.

Lemma 1.23
$\mathcal{C}_n$ ist keine Menge

Beweis: Sonst sei $\kappa = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{C}_n} \alpha$ dann ist $\kappa \geq \alpha$ für jede Kardinalzahl α. $\wp(\kappa)$ ist eine Menge und es gibt keine surjektive Funktion von κ nach $\wp(\kappa)$. Es gilt $\kappa < |\wp(\kappa)|$ denn angenommen $\kappa \geq |\wp(\kappa)|$ dann gibt es $f : \wp(\kappa) \to |\wp(\kappa)|$ bijektiv nach Definition von $|\wp(\kappa)|$ und ein surjektives $g : \kappa \to |\wp(\kappa)|$ da $|\wp(\kappa)|$ nicht leere Teilmenge von κ. Dann wäre $f^{-1} \circ g : \kappa \to \wp(\kappa)$ surjektiv.Ψ

Mit $\kappa < |\wp(\kappa)|$ und κ größer als jede Kardinalzahl ergibt sich der Widerspruch.

$\square$

Bemerkung

- $\omega = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ daher ω ist die Menge der endlichen Ordinalzahlen.
- jedes $n \in \omega$ ist auch eine Kardinalzahl

- ω ist die Menge der Endlichen Kardinalzahlen.
- Wenn $\alpha \notin \omega$ dann muss α unendlich sein.

Da die Kollektion von Kardinalzahlen keine Menge ist, ist auch die Kollektion der Unendlichen Kardinalzahlen $\mathcal{K}_n$ keine Menge. Diese Kollektion ist Wohlgeordnet und somit $\mathcal{K}_n \simeq \mathcal{O}_n$. Dann gibt es aber einen (eindeutigen) Isomorphismus $\aleph : (\mathcal{O}_n, <) \to (\mathcal{K}_n, <)$ mit $\alpha \mapsto \aleph(\alpha) =: \aleph_\alpha$.

Beispiel $\aleph_0 = \aleph(0)$ ist das kleinste Element aus $\mathcal{K}_n$, daher die kleinste unendliche Kardinalzahl also $\aleph_0 = \omega$.

Wir notieren manchmal auch ω statt $\aleph_0$ und ω_1 statt $\aleph_1$.

Definition Seien α, β Kardinalzahlen wir definieren Kardinalzahl Arithmetik

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= |\alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}| \\ \alpha \cdot \beta &= |\alpha \times \beta| \\ \alpha^\beta &= |\{f : \beta \to \alpha\}| \end{aligned}$$

Sei I eine Menge und zu jedem $i \in I$ sei κ_i eine Kardinalzahl, dann ist

$$\begin{aligned} \prod_{i \in I} \kappa_i &= \left| \bigtimes_{i \in I} \kappa_i \right| \\ \sum_{i \in I} \kappa_i &= \left| \bigcup_{i \in I} \kappa_i \times \{i\} \right| \end{aligned}$$

Notation Seien a und b Mengen. Dann sei a^b die Menge von Abbildungen $f : b \to a$. a^b ist tatsächlich auch eine Menge, denn eine Funktion $f : b \to a$ kann als Teilmenge von $b \times a$ aufgefasst werden und daher ist $a^b \subseteq \wp(b \times a)$ und somit $a^b \in \wp(\wp(a \times b))$.

Bemerkung Seien a, b, c Mengen, so sind $|a \times b| = |a| \cdot |b|$, $\left|a^b\right| = |a|^{|b|}$ und falls $a \cap b = \emptyset$ dann ist auch $|a \cup b| = |a| + |b|$.
Sei $(a_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen, dann ist $|\bigtimes_{i \in I} a_i| = \prod_{i \in I} |a_i|$ und falls $a_i \cap a_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$, so gilt auch $\left|\bigcup_{i \in I} a_i\right| = \sum_{i \in I} |a_i|$.

Es gilt weiterhin $\left|(a^b)^c\right| = (|a|^{|b|})^{|c|}$ und wenn $b \cap c = \emptyset$, dann gilt auch $\left|a^{b \cup c}\right| = |a|^{|b|} \cdot |a|^{|c|}$.

Lemma 1.24
Für jede Menge A gilt $|\wp(A)| = \left|2^A\right| = 2^{|A|}$.

Beweis: Sei $g : \wp(A) \to 2^A$ gegeben durch

$$\begin{array}{rccc} g: & \wp(A) & \to & 2^A \\ & B & \mapsto & \boxed{\begin{array}{rccc} g(B): & A & \to & \{0,1\} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 0, & x \notin B \\ 1, & x \in B \end{cases} \end{array}} \end{array}$$

g ist Bijektiv. Also ist $|\wp(A)| = |2^A|$ $\square$

Bemerkung ABER für alle A ist $|A| < |2^A|$. Dann gilt für jede Kardinalzahl κ auch $\kappa < 2^\kappa$ und insbesondere $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$

Es stellt sich daher die Frage, ob Kardinalzahlen zwischen $\aleph_0$ und $2^{\aleph_0}$ existieren. Daher ist $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Diese Aussage wird auch als Kontinuums-Hypothese bezeichnet und kann weder bewiesen, noch widerlegt werden.

Lemma 1.25
$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$

Beweis: Reicht zu zeigen, dass es ein $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv gibt. Sei $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $(p, q) \mapsto \frac{(p+q)(p+q+1)}{2} + q$. g ist bijektiv. $\square$

Bemerkung Es gilt generell $\aleph_\delta \cdot \aleph_\delta = \aleph_\delta$

Aus $|\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$ folgt durch Induktion $|\mathbb{N}^n| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$.

Wenn $|A| \leq \aleph_0$ bezeichnen wir A als abzählbar.

Lemma 1.26
Sei $(A_i)_{i \in I}$ *mit* $|I| \leq \aleph_0$ *eine Familie von Mengen, sodass* $|A_i| \leq \aleph_0$ *für jedes* $i \in I$. *Dann ist* $\left|\bigcup_{i \in I} A_i\right| \leq \aleph_0$

Beweis: O.B.d.A. sei $I = \mathbb{N}$ und die A_i disjunkt. Sonst wähle man $f : \mathbb{N} \to I$ ersetzen dann die $A_{f(i)}$ durch $B_i = A_{f(i)} \setminus \left(\bigcup_{j<i} A_{f(j)}\right)$.

Jedes der A_i ist abzählbar, daher gibt es für jedes $i \in \mathbb{N}$ eine injektive Funktion $f_i : A_i \to \mathbb{N}$. Dann sei L_i die Menge von Injektionen $A_i \to \mathbb{N}$ für jedes $i \in \mathbb{N}$. Nach Voraussetzung ist L_i nicht Leer. Nach Auswahlaxiom existiert eine Auswahlfunktion $g : \mathbb{N} \to \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L_i$, mit $g(i) \in L_i$. Sei $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Injektion, dann sei $F : \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \to \mathbb{N}$ definiert durch $F(x) = h(i, (g(i))(x))$ für $x \in A_i$.

F ist injektiv. (Beweis als Übung) $\square$

Korollar 1.27
$\mathbb{N}^{<\aleph_0} := \bigcup_{p<\aleph_0} \mathbb{N}^p$ *ist abzählbar.*

2 Topologie

Notation

- (X, τ) bezeichne im Allgemeinen einen topologischen Raum. Hierbei sei τ die Menge der offenen Mengen von X.
- (X, d) bezeichne einen metrischen Raum wobei $d : X \times X \to [0, \infty)$ die Metrik ist.
- $B(x, \varepsilon[= \{y : d(x, y) < \varepsilon\}$ und $B(x, \varepsilon] = \{y : d(x, y) \leq \varepsilon\}$

Definition Ein topologischer Raum ist **metrisierbar** genau dann, wenn es ein Metrik gibt, die genau die Topologie induziert.

Definition Sei (X, d) metrischer Raum.

(1) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus X ist **Cauchy-Folge** genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für jedes Paar $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m > n > n_0$ auch $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ gilt.

(2) (X, d) ist **vollständig** genau dann, wenn jede Cauchy-Folge aus X auch in X konvergiert.

Definition Sei (X, τ) topologischer Raum.

(3) $A \subseteq X$ **ist dicht in** X, falls zu jedem $V \in \tau$ mit $V \neq \emptyset$ bereits $A \cap V \neq \emptyset$

(4) Man nennt (X, τ) **separabel** genau dann, wenn es ein abzählbares $A \subseteq X$ gibt, welches dicht in X liegt.

(5) (X, τ) heißt **polnischer Raum** genau dann, wenn X separabel und metrisierbar durch eine vollständige Metrik ist.

Bemerkung Aus $\mathbb{Q}$ abzählbar folgt auch $\mathbb{Q}^n$ abzählbar alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel $\mathbb{R}^n$ ist ein polnischer Raum für alle $n \in \mathbb{N}$.

Definition Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $\tau' \subseteq \tau$. τ' heißt **Basis der Topologie** genau dann, wenn jedes $V \in \tau$ sich als Vereinigung $V = \bigcup_{V_i' \in \tau'} V_i'$ von Elementen $V_i' \in \tau'$ darstellen lässt.

Beispiel Sei (X, d) metrischer Raum. Die Menge $\tau' = \{B(x, \frac{1}{n}[, x \in X \text{ und } n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Basis

Definition (und Satz) Sei (X, d) ein metrischer Raum und d' eine Metrik auf X. d **und** d' **heißen Äquivalent** genau dann, wenn sie die gleiche Topologie auf X induzieren. Äquivalente Bedingungen

(1) Jede $B_d(x, \varepsilon[$-Kugel ist offen in (X, d') und umgekehrt jede $B_{d'}(x, \varepsilon[$-Kugel ist offen in (X, d).

(2) $\mathrm{id} : (X, d) \to (X, d')$ ist ein Homöomorphismus.

Übung Sei (X, d) metrischer Raum. Dann gibt es eine Metrik d' auf X, sodass d und d' äquivalent und $d(x, y) < 1$ für jedes Paar $x, y \in X$.

Hinweis: Man zeige $d' : X \times X \to [0, \infty)$ mit $d'(x, y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ induziert die selbe Topologie wie d.

Übung Sei (X, d) metrischer Raum. Dann ist (X, d) separabel genau dann, wenn er eine abzählbare Basis besitzt.

Beweis: $\Longrightarrow$ Sei $A = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare dichte Menge von X. Diese existiert, da X separabel.

Sei
$$\tau' := \left\{ B(a_i, \tfrac{1}{n}[\quad : i \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

Es reicht zu zeigen, dass τ' eine Basis von (X, d) ist. Sei nun $V \in \tau$ eine offene Menge. Es reicht für jedes $x \in V$ ein $U_x \in \tau'$ zu finden, sodass $x \in U_x \subseteq V$, denn dann ist $V = \bigcup_{x\in V} U_x$. Sei $x \in V$, da V offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B(x, \varepsilon[\subseteq V$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\varepsilon > \frac{1}{n}$. Da A dicht liegt, gibt es ein $a_i \in B(x, \frac{1}{2n}[$. Man setze $U_x := B(a_i, \frac{1}{2n}[$. Da $d(a_i, x) \leq \frac{1}{2n}$ gilt, ist auch $x \in U_x$. Außerdem ist wegen der Dreiecksungleichung $U_x \subseteq B(x, \frac{1}{n}[\subseteq V$. Denn ist $y \in U_x$, so ist $d(a_i, y) < \frac{1}{2n}$ und

$$d(x, y) \leq d(x, a_i) + d(a_i, y) < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$$

τ' ist also Basis für X.

$\Longleftarrow$ Sei $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Basis für X. Nach Auswahlaxiom gibt es ein $a : \mathbb{N} \to \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$ mit $a_i = a(i) \in U_i$. Da jedes offene nicht-leere V mindestens ein U_i enthält, ist $A = \{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ dicht. $\square$

Übung Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(U_i)_{i\in I}$ eine Basis der Topologie. Sei $g : X \to \wp(I), x \mapsto \{i \in I : x \in U_i\}$.

- g ist injektiv (jeder Metrische Raum ist Hausdorff)
- (X, d) separabel, dann gilt auch $|X| \leq 2^{\aleph_0}$

  Achtung: Die Umkehrung gilt nicht. Man betrachte $X = 2^{\aleph_0}$ mit d der diskreten Metrik.

Übung Sei (X, d) ein separabler metrischer Raum. z.z. jede Teilmenge $X' \subseteq X$ ist separabel.

Beweis: Sei (X, d) separabel, dann gibt es eine abzählbare Basis $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ der Topologie von X. Sei $X' \subseteq X$, dann ist $(X' \cap U_i)$ abzählbare Basis der Topologie von X' und X' auch separabel. $\square$

Übung Sei $(X_i, d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Familie von metrischen Räumen. Der topologische Raum $\bigtimes_{i\in\mathbb{N}} X_i$ ist metrisierbar.

Idee: Man nehme $d : (\bigtimes_{i\in\mathbb{N}} X_i)^2 \to [0, \infty)$ mit

$$d((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, (y_i)_{i\in\mathbb{N}}) := \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^i} \min\{1, d_i(x_i, y_i)\}$$

3 Polnische Räume

3.1 Die Räume $\mathcal{N}$ und $\mathcal{C}$

Übung Seien $(X_i, d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ metrische Räume dann

1. ist $\prod_{i\in\mathbb{N}}(X_i, d_i)$ separabel, wenn alle $(X_i, d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ separabel sind.
2. Sei $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\prod_{p\in I}(X_p, d_p)$ dann ist a_i eine Cauchy-Folge genau dann, wenn für jedes $p \in I$ auch $(a_i(p))_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in (X_p, d_p) ist. Außerdem ist für jedes $a \in \prod_{p\in I} X_p$ genau dann ein Grenzwert von $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, wenn die $a(p)$ auch Grenzwert von $(a_i(p))_{i\in\mathbb{N}}$.
3. Falls für jedes $i \in I$ das X_i polnisch ist, so ist $\prod_{i\in I} X_i$ auch polnisch.

Bemerkung Sei A eine abzählbare Menge. Auf A erklärt man die diskrete Metrik daher

$$d(x,y) = 1 - \delta_{x,y} = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \neq y \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(A, d) ist ein polnischer Raum, denn A ist dicht in A und die diskrete Metrik ist vollständig. Denn eine Folge (a_i) ist Cauchy-Folge genau dann, wenn es ein n_0 gibt sodass die Folge $(a_{i+n_0})_{i\in\mathbb{N}}$ konstant ist.

$A^{\mathbb{N}}$ ist Polnisch. Denn wenn d die diskrete Metrik auf A ist, dann ist $\tilde{d}((x_i),(y_i)) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{d(x_i,y_i)}{2^i}$ eine vollständige Metrik für $A^{\mathbb{N}}$.

Definition

- **Cantorraum** ist der polnische Raum $\mathcal{C} = 2^{\mathbb{N}} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (die Menge der $0,1$ Folgen)
- **Baireraum** ist der polnische Raum $\mathcal{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ der Folgen von natürlichen Zahlen.

Bemerkung Für $A = 2 = \{0,1\}$ oder $A = \mathbb{N}$ hat man die Metrik $d((x_i),(y_i)) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{d(x_i,y_i)}{2^i}$

Definition Sei ferner $s \in A^{<\mathbb{N}}$ (eine endl. Folge von Elementen von A). Wir definieren **die Länge von** s (notiert $|s|$) ist n genau dann, wenn $s \in \mathbb{N}^n$. Für $s \in A^{<\mathbb{N}}$ mit $|s| = n$ und $a \in A$ sei $s \wedge a = (s_0, \dots, s_{n-1}, a)$.

Habe nun $s \in A^{<\mathbb{N}}$ die Länge n so definiert man

$$N_s := \{x \in A^{\mathbb{N}},\ \text{sodass } x\restriction_n = s\}$$

daher $x \in N_s$ hat die Form $x = (s_0, s_1, \dots, s_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \dots)$.

Bemerkung

- Die N_s sind offen in $A^{\mathbb{N}}$, denn $N_s = \{s_0\} \times \{s_1\} \times \{\dots\} \times \{s_{n-1}\} \times A \times A \times \dots$ und die $\{s_i\}$ sind offen in A, da A die diskrete Topologie hat.

- Sei O eine Offene Menge von $A^{\mathbb{N}}$. Dann gibt es offene Mengen $U_0, \dots, U_{m-1} \subseteq A$ sodass

  $$O = A \times \dots \times A \times U_0 \times A \times \dots \times A \times U_1 \times A \times \dots \times A \times U_{n-1} \times A \times A \times \dots$$

  O.B.d.A. sei

  $$O = U_0 \times U_1 \times \dots \times U_{n-1} \times A \times A \times \dots$$

  dann lässt sich O auch darstellen als $O = \bigcup_{s \in U_0 \times \dots U_{n-1}} N_s = \bigcup_{x \in O} N_{x|_n}$

- Folglich ist $\{N_s \mid s \in A^{<\mathbb{N}}\}$ eine abzählbare Basis der Topologie von $A^{\mathbb{N}}$.

- Jedes der $\mathcal{N}_s$ ist abgeschlossen, denn

  $$\complement_{A^{\mathbb{N}}} N_s = \bigcup_{\substack{s' \neq s \\ |s'| = |s|}} N_{s'}$$

  und somit ist das Komplement offen.

- $A^{\mathbb{N}}$ besitzt eine abzählbare Basis von offen-abgeschlossenen Mengen.

- Sei $x \in A^{\mathbb{N}}$, dann ist $\{N_{x|_n} : n \in \mathbb{N}\}$ die Umgebungsbasis von x. $N_{x|_0} = A^{\mathbb{N}}$

Übung

1. Es existiert eine Teilmenge von $\mathcal{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ die homöomorph zu $\mathcal{C} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$
2. Es existiert eine Teilmenge von $\mathcal{C}$ die homöomorph zu $\mathcal{N}$

zu 2.) sei $f : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ mit

$$(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mapsto (\underbrace{0, \dots, 0}_{x_0 \text{ mal}}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{x_1 \text{ mal}}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{x_2 \text{ mal}}, 1, \dots)$$

dann ist f injektiv.

Außerdem ist f stetig, denn sei $x \in \mathcal{N}$. Und sei $N_{f(x)|_n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ eine Umgebung um $f(x)$, dann ist $N_{x|_n}$ eine Umgebung von x und für $y \in N_{x|_n}$ ist auch $f(y) \in N_{f(x)|_n}$.

$f^{-1} : f(\mathcal{N}) \to \mathcal{N}$ ist stetig, denn:
Sei $f(x) \in f(\mathcal{N})$ und $N_{x|_n}$ eine Umgebung von $f^{-1}(f(x)) = x$. Gesucht ist dann eine Umgebung von $N_{f(x)|_p}$, sodass für $y \in N_{f(x)|_p}$ auch $f^{-1}(y) \in N_{x|_n}$ gilt. Wähle $p = n + \sum_{i<n} x_i$. Nun wenn man die ersten p stellen von $f(z)$ kennt und weiß, dass $f(z) |_p = f(x) |_p$, dann weiß man auch, dass $z |_n = x |_n$ und daher $z \in N_{x|_n}$.
Damit ist f^{-1} stetig.

Lemma 3.1
Sei X ein polnischer Raum, dann ist X homöomorph zu einer Teilmenge von $[0,1]^{\mathbb{N}}$.

Beweis: Sei d eine vollständige Metrik auf X und o.B.d.A. sei $d < 1$ andernfalls betrachte $d/(d+1)$.

Sei $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine dichte Menge in X. Sei $g : X \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ mit $x \mapsto (d(x,x_i))_{i\in\mathbb{N}}$ und d_∞ die folgende Metrik auf $[0,1]^{\mathbb{N}}$:

$$d_\infty((a_i),(b_i)) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{|a_i - b_i|}{2^{i+1}}$$

Dann ist g stetig, denn sei $\varepsilon > 0$ und $d(x,y) < \varepsilon$ dann ist auch nach Dreiecksungleichung $|d(x,x_i) - d(y,x_i)| < \varepsilon$ für jedes $i \in \mathbb{N}$ und somit

$$d_\infty((d(x,x_i))_i,(d(y,x_i))_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{|d(x,x_i) - d(y,x_i)|}{2^{i+1}} < \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} = \varepsilon$$

und folglich ist g stetig.

g^{-1} stetig, denn sei $\varepsilon > 0$ und $x \in X$ fest. Wenn $d(x,y) > \varepsilon$, dann sei x_{i_0} in $B(x,\frac{\varepsilon}{4}[$. Dann gilt da $d(x,y) > \varepsilon$ und $d(x,x_{i_0}) < \frac{1}{4}\varepsilon$ auch $d(y,x_{i_0}) > \frac{3}{4}\varepsilon$ und folglich ist $|d(x_{i_0},x) - d(x_{i_0},y)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$.

$$d(g(x),g(y)) \geq \frac{|d(x_{i_0},y) - d(x_{i_0})|}{2^{i_0}} > \frac{\varepsilon}{2^{i_0+1}}$$

g ist injektiv, denn wenn $x \neq y$ ist, so ist $d(x,y) > 0$ und somit $d_\infty(g(x),g(y)) > 0$. g^{-1} ist stetig, weil aus obiger Argumentation folgt, dass aus $d_\infty(g(x),g(y)) < \frac{\varepsilon}{2^{i_0+1}}$ auch $d(x,y) = d(g^{-1}(g(x)),g^{-1}(g(y))) < \varepsilon$ folgt. □

Theorem 3.2
Sei $A = \{0,1\}$ bzw. $A = \mathbb{N}$ und $X = A^{\mathbb{N}}$ daher $X = \mathcal{C}$ oder $X = \mathcal{N}$. Sei $F \neq \emptyset$ abgeschlossen in X. Dann ist F ein Retrakt von X, daher es gibt eine stetige Abbildung $g : X \to F$ mit $g|_F = id_F$.

Beweis: Für jedes $s \in A^{<\mathbb{N}}$ mit $N_s \cap F \neq \emptyset$ sei a_s ein Element aus $N_s \cap F$. Falls $x \notin F$, dann gibt es da F abgeschlossen ist um x eine Umgebung $N_{x|_n}$, sodass $N_{x|_n} \cap F = \emptyset$. Es gilt dann für $n' > n$, dass $N_{x|'_n} \cap F \subseteq N_{x|_n} \cap F = \emptyset$ ist. Aber $N_{x|_0} = X$ und somit ist $N_{x|_0} \cap F = F \neq \emptyset$. Dann aber gibt es ein größtes n_x, für das $N_{x|_{n_x}} \cap F \neq \emptyset$.

Sei nun $g : X \to F$ wie folgt

$$g : x \mapsto \begin{cases} x, & x \in F \\ a_{x|_{n_x}} \end{cases}$$

z.z. g ist stetig.

Sei nun $x \notin F$, dann ist $N_{x|_{n_x+1}} \cap F = \emptyset$. Sei $y \in N_{x|_{n_x+1}}$, so ist auch $x\,|_{n_x+1} = y\,|_{n_x+1}$, daher $N_{x|_{n_x+1}} = N_{y|_{n_x+1}}$ und $N_{y|_{n_x+1}} \cap F = \emptyset$. Da aber dann

$y\mid_{n_x} = x\mid_{n_x}$ folgt, ist $N_{x|n_x} = N_{y|n_x}$ und folglich ist $N_{y|n_x} \cap F \neq \emptyset$. Daher muss aber $n_x = n_y$ sein und somit

$$g(y) = a_{y|n_y} = a_{y|n_x} = a_{x|n_x} = g(x)$$

g ist also auf einer Umgebung um $x \notin F$ konstant und somit stetig in $x \notin F$.

Sei nun $x \in F$ und $N_{x|n}$ eine Umgebung von x. Zu zeigen ist dann, dass $g(N_{x|n}) \subseteq N_{g(x)|n}$.

Sei also $y \in N_{x|n}$.

Falls $y \in F$ so ist $g(y) = y \in N_{x|n} = N_{g(x)|n}$.

Falls $y \notin F$, aber $x \in F$, dann ist $x\mid_n = y\mid_n$ und somit $N_{y|n} = N_{x|n}$. Da aber $x \in N_{y|n} = N_{x|n}$ gilt $N_{y|n} \cap F \neq \emptyset$. n_y ist aber die größte Zahl p, sodass $F \cap N_{y|p} \neq \emptyset$ und folglich ist wegen $n_y \geq n$ auch $N_{y|n_y} \subseteq N_{y|n}$. Damit ist

$$g(y) = a_{y|n_y} \in N_{y|n_y} \subseteq N_{y|n} = N_{x|n} = N_{g(x)|n}. \qquad \square$$

3.2 Allgemeine polnische Räume und Fortsetzbarkeit stetiger Funktionen

Bemerkung Sei O ein topologischer Raum und $A \subseteq O$, dann versehen wir A mit der durch A induzierten Teilraum Topologie, daher für offenes $U \subseteq O$ ist $A \cap U \subseteq A$ offen in A.

Definition Sei P ein metrischer Raum, $A \subseteq P$ mit $x \in P$ und $A \neq \emptyset$. **Der Abstand von x zu A** definiert sich zu $d(x, A) := \inf\{d(x, y) : y \in A\}$.

Bemerkung Wenn A abgeschlossen ist, so ist für $x \notin A$ auch $d(x, A) > 0$.

Denn sei $x \in P$ mit $d(x, A) = 0$. Dann $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in A$ mit $d(x, x_n) < \frac{1}{n}$. dann gilt aber $x_n \to x$ und da A abgeschlossen gilt auch $x \in A$.

Übung Sei (P, d) ein metrischer Raum und A eine offene Teilmenge von P.

Sei $\tilde{d}_A : A \times A \to \mathbb{R}^+$ mit

$$(x, y) \mapsto d(x, y) + \left| \frac{1}{d(x, P \setminus A)} - \frac{1}{d(y, P \setminus A)} \right|$$

Dann definiert $\tilde{d}_A$ die gleiche Topologie auf A.

Übung Sei A eine Π^0_2 Menge daher $A = \bigcap_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ O_n \text{ offen}}} O_n$

Seien im weiteren die O_n fixiert.

Sei $d_A : A \times A \to \mathbb{R}^+$ mit

$$(x, y) \mapsto d(x, y) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\left\{1, \left| \frac{1}{d(x, P \setminus O_n)} - \frac{1}{d(y, P \setminus O_n)} \right| \right\}$$

dann definiert d_A die gleiche Topologie auf A und d_A ist eine Metrik.

Lemma 3.3
Sei (P,d) ein vollständiger, metrischer Raum und $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n \in \Pi_2^0$, dann ist d_A vollständig.

Beweis: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in A bzgl. d_A. Da nach Definition $d \leq d_A$ ist x_n damit auch Cauchy-Folge bzgl. d. Aber P ist vollständig und damit gibt es ein $x \in P$ sodass x_n gegen x bzgl. d konvergiert. Es reicht also zu zeigen, dass x dann bereits in A liegt.

Angenommen $x \notin A$ dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass $x \notin O_{n_0}$. Da x_n Cauchy-Folge bzgl. d_A gibt es für $\varepsilon = \frac{1}{2^{n_0}}$ ein p sodass für alle $q > p$ auch $d_A(x_p, x_q) < \varepsilon$ gilt.

Sei nun p fixiert. Wenn $x_q \to x \notin O_{n_0}$, dann geht $d(x_q, x) \to 0$ und da $x \notin O_{n_0}$ damit auch $d(x_q, P \setminus O_{n_0}) \to 0$. Dann aber geht das reziproke $\frac{1}{d(x_q, P\setminus O_{n_0})} \to \infty$ und da p fest ist, geht auch $\left|\frac{1}{d(x_p,P\setminus O_{n_0})} - \frac{1}{d(x_q,P\setminus O_{n_0})}\right| \to \infty$. Somit gibt es ein q_0, sodass $\left|\frac{1}{d(x_p,P\setminus O_{n_0})} - \frac{1}{d(x_q,P\setminus O_{n_0})}\right| > 1$ für $q \geq q_0$ und daher

$$a_{n_0} := \frac{1}{2^{n_0}} \min\left\{1, \left|\frac{1}{d(x_p, P\setminus O_{n_0})} - \frac{1}{d(x_q, P\setminus O_{n_0})}\right|\right\} = \frac{1}{2^{n_0}}.$$

□

Aber dann ist $d_A(x_p, x_{q_0}) \geq a_{n_0} = \frac{1}{2^{n_0}}$ und da x_n Cauchy-Folge folgt wegen $q_0 > p$ dass $d_A(x_p, x_{q_0}) < \varepsilon = \frac{1}{2^{n_0}}$ was ein widerspruch ist. Ψ

Theorem 3.4 (Alexandrov)
Sei P ein polnischer Raum und $A \in \Pi_2^0(P)$, dann ist A ein polnischer Raum.

Beweis:
- A ist Teilmenge von P und ist separabel, da P separabel ist.
- P ist vollständig metrisierbar. Sei d eine vollständige Metrik auf P, die die Topologie induziert. Dann induziert d_A die Topologie von A und ist vollständig.

□

Definition Seien (P,d) und (P',d') metrische Räume, $A \subseteq P$ und $f : A \to P'$ stetig. Sei $x \in \overline{A}$. Man definiert die **Oszillation von f in x** und notiert $w(f,X)$ als

$$w(f,x) = \inf_{\varepsilon>0} \sup\{d(f(x_1), f(x_2)) : x_1, x_2 \in A \cap B(x, \varepsilon[\}$$

Bemerkung

- Wenn $x \in A$ dann $w(f,x) = 0$ wegen Stetigkeit
- Wenn (P',d') vollständig und $x \in \overline{A}$, dann

  $w(f,x) = 0$ genau dann, wenn f sich stetig auf $A \cup \{x\}$ fortsetzen lässt.

- Sei (P', d') vollständig. Dann lässt sich f stetig fortsetzen auf

$$\{x \in \overline{A} : w(f,x) = 0\}$$

Beweis: (Skizze) Sei $x \in \overline{A}$ mit $w(f,x) = 0$. Für $x \in A$ definiert man $\tilde{f}(x) = f(x)$. Wenn $x \in \overline{A} \setminus A$ dann gibt es in A eine Folge x_n die in P gegen x konvergiert. $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge, da $w(f,x) = 0$. P' vollständig und $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert $a \in P'$. Definiere $\tilde{f}(x) := a$. Man zeigt dann, dass $\tilde{f}$ stetig und eindeutig. $\square$

Übung $\{x \in \overline{A} : w(f,x) = 0\}$ ist die größte Teilmenge von $\overline{A}$ auf der sich f stetig fortsetzen lässt.

Beweis: (Skizze) Für $\overline{A} = \{x \in \overline{A} : w(f,x) = 0\}$ ist nichts zu zeigen. Sei daher $x \in \overline{A} \setminus \{x \in \overline{A} : w(f,x) = 0\}$. Dann ist $w(f,x) = \delta > 0$. Somit gibt es in jeder noch so kleinen ε-Umgebung $B(x, \varepsilon[$ um x ein u_ε und ein v_ε, sodass $d(f(u_\varepsilon), f(v_\varepsilon)) \geq \delta$. Man konstruiere eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_{2n} := u_{\frac{1}{n+1}}$, $x_{2n+1} := v_{\frac{1}{n+1}}$. Es gilt $x_n \to x$ aber $f(x_n)$ ist nicht konvergent und jede Fortsetzung $\tilde{f}$ an x nicht stetig. $\square$

Theorem 3.5 (Kuratowski)
Seien (P,d) und (P', d') metr. Räume. P' vollständig. Seien $A \subseteq P$ und $f : A \to P'$ stetig. Dann existiert ein $\tilde{A} \in \Pi^0_2(P)$ sodass sich f stetig auf $\tilde{A}$ fortsetzen lässt.

Beweis: Es reicht zu zeigen dass $\{x \in \overline{A} : w(f,x) = 0\}$ eine Π^0_2 Menge in P ist.

$$w(f,x) = 0 \iff \forall n \in \mathbb{N} \quad w(f,x) < \tfrac{1}{n}$$

Sei $A_n := \{x \in \overline{A} : w(f,x) < \frac{1}{n}\}$.

Wir zeigen zuerst, dass A_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ offen in $\overline{A}$ ist.

Sei $x \in A_n$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ sodass für jedes Paar $x_1, x_2 \in B(x, \varepsilon[\cap A$ gilt $d(f(x_1), f(x_2)) < \frac{1}{n}$. Dann ist $C := B(x, \varepsilon[\cap \overline{A}$ eine offene Umgebung von x in $\overline{A}$ und sie ist Teilmenge von A_n, denn es lässt sich für jeden Punkt x' innerhalb davon eine offene Umgebung um x' finden und in dieser bleibt die Bedingung erhalten.

A_n ist also offen in $\overline{A}$ und demnach gibt es ein in P offenes O_n sodass $A_n = O_n \cap \overline{A}$.

Der Rest folgt aus folgender Bemerkung. $\square$

Bemerkung Jede abgeschlossene Menge F ist Π^0_2, denn $F = \bigcap_{n>0} \underbrace{\left(\bigcup_{x \in F} B(x, \tfrac{1}{n}[\right)}_{\text{offen}}$.

Sei also $\overline{A} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O'_n$ für O'_n offen in P. Dann ist $\{x \in \overline{A} : w(f,x) = 0\}$ auch Π^0_2.

$$\begin{aligned}\{x \in \overline{A} : w(f,x) = 0\} &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (O_n \cap \overline{A}) = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n\right) \cap \overline{A} \\ &= \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n\right) \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O'_n\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} P_n\end{aligned}$$

wobei P_n ist $O_{\frac{n}{2}}$ für n gerade und $O'_{\frac{n-1}{2}}$ für n ungerade.

Bemerkung Seien X und Y topologische Räume.

1) Wenn $f : X \to Y$, $B \in \Pi^0_2(Y)$ dann ist auch $f^{-1}(B) \in \Pi^0_2(X)$, denn für $B = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} O_i$ ist $f^{-1}(B) = f^{-1}\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} O_i\right) = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} f^{-1}(O_i)$

2) Wenn X ein Metrischer Raum ist, dass ist die Diagonale $\{(x,x) : x \in X\}$ abgeschlossen in $X \times X$.

   Denn Allgemein gilt, dass der Graph $\{(x, f(x)) \in X \times Y\}$ einer stetigen Funktion $f : X \to Y$ abgeschlossen in $X \times Y$ ist. Und $\{(x,x) : x \in X\}$ ist der Graph von id_X.

Theorem 3.6 (Lavrentiev)
Seien X, Y zwei vollständige Metrische Räume und $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ und f ein Homöomorphismus von A auf B. Dann gibt es $\tilde{A} \in \Pi^0_2(X)$ mit $A \subseteq \tilde{A}$ und $\tilde{B} \in \Pi^0_2(Y)$ mit $B \subseteq \tilde{B}$ und einen Homöomorphismus $\tilde{f} : \tilde{A} \to \tilde{B}$, sodass $\tilde{f} \mid_A = f$

Beweis: Sei $A' \in \Pi^0_2(X)$ mit $A \subseteq A'$ und $f' : A' \to Y$ eine stetige Fortsetzung von f. Sei analog $B' \in \Pi^0_2(Y)$ mit $B \subseteq B'$ und $g' : B' \to X$ eine stetige Fortsetzung von f^{-1}.

Seien

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \{x \in A' : f'(x) \in B', (g' \circ f')(x) = x\} \\ \tilde{B} &= \{y \in B' : g'(y) \in A', (f' \circ g')(y) = y\}\end{aligned}$$

Sei $\tilde{f} = f' \mid_{\tilde{A}}$ und $\tilde{g} = g' \mid_{\tilde{B}}$

Es gilt zu zeigen, dass $\tilde{f}$ eine Homöomorphismus von $\tilde{A}$ auf $\tilde{B}$ ist sowie dass $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ aus Π^0_2 sind.

$\tilde{f}(\tilde{A}) \subseteq \tilde{B}$ Sei $y = \tilde{f}(x) \in \tilde{f}(\tilde{A})$ dann gilt $g'(y) = g'(\tilde{f}(x)) = g'(f'(x)) = x \in \tilde{A}$ bzw. $g(y) \in A'$ und $f'(g'(y)) = f'(g'(\tilde{f}(x))) = f'(x) = \tilde{f}(x) = y$. Folglich ist $\tilde{f}(x) \in \tilde{B}$.

$\tilde{g}(\tilde{B}) \subseteq \tilde{A}$ Zeigt man Analog. Und da auf $\tilde{B}$ gilt, dass $f'(g'(x)) = x$ folgt somit auch $\tilde{f}(\tilde{g}(\tilde{B})) = \tilde{B} \subseteq \tilde{f}(\tilde{A})$

Damit sind $\tilde{f} : \tilde{A} \to \tilde{B}$ und $\tilde{g} : \tilde{B} \to \tilde{A}$ mit $\tilde{f} \circ \tilde{g} = \mathrm{id}_{\tilde{B}}$ und $\tilde{g} \circ \tilde{f} = \mathrm{id}_{\tilde{A}}$. Folglich ist $\tilde{f}$ eine Homöomorphismus. ($\tilde{f}$ stetig, da f' stetig und $\tilde{g} = \tilde{f}^{-1}$ da g' stetig).

Es fehlt noch zu zeigen, dass $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ in Π_2^0 sind. Reicht zu zeigen dass $\tilde{A}$ es ist, weil $\tilde{B}$ folgt analog durch Vertauschung von f, f^{-1}.

Sei $A'' = \{x \in A' : f'(x) \in B'\} = f'^{-1}(B') \cap A'$. Da $B' \in \Pi_2^0$ und f' stetig ist, ist $f'^{-1}(B')$ auch Π_2^0 und da $A' \in \Pi_2^0$ ist damit auch $A'' \in \Pi_2^0$.

Sei $h : A'' \to X \times X$ mit $x \mapsto (x, (g' \circ f')(x))$ dann ist h stetig und $\tilde{A} = h^{-1}(\{(x,x) : x \in X\})$. Da $\{(x,x) : x \in X\}$ abgeschlossen ist, ist $\tilde{A}$ abgeschlossen in A''. Dann gibt es eine abgeschlossene Menge F von X, sodass $\tilde{A} = A \cap F$. F ist abgeschlossen also $F \in \Pi_2^0$ und dann ist $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ wobei O_n offen sind in X. A'' ist Π_2^0 und folglich gibt es offene O'_n mit $A'' = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O'_n$. Dann aber ist

$$\tilde{A} = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n\right) \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O'_n\right) = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} P_n\right)$$

mit P_n ist $O_{\frac{n}{2}}$ für n gerade und $O'_{\frac{n-1}{2}}$ für n ungerade. Folglich ist $\tilde{A} \in \Pi_2^0$. $\tilde{B}$ folgt Analog. □

Theorem 3.7
Sei (X, d) ein Polnischer Raum und $Y \subseteq X$. Dann ist $(Y, d\mid_{Y\times Y})$ ein Polnischer Raum genau dann, wenn $Y \in \Pi_2^0$.

Beweis: $\Longrightarrow$ schon bewiesen.

$\Longleftarrow$ Wir wenden das vorherige Theorem mit $A = Y \subseteq X$ und $B = Y \subseteq Y$ an. Dann ist $\mathrm{id}_Y : A \subseteq X \to B \subseteq Y$ ein Homöomorphismus und dieser kann zu einem Homöomorphismus auf $\tilde{A} \in \Pi_2^0(X)$ mit $A \subseteq \tilde{A}$ nach $\tilde{B} \in \Pi_2^0(Y)$ erweitert werden. Da aber B bereits der gesamte Raum Y ist, gilt $Y = \tilde{B} = B$. Dann aber muss $A = \tilde{A} = Y$ sein, da die Erweiterung sonst nicht injektiv ist. Folglich ist $Y \in \Pi_2^0(X)$. □

Beispiel $\mathcal{N} = \mathbb{N}^\mathbb{N}$. Sei $S_\infty = \{x \in \mathcal{N} : x \text{ ist bijektiv }\}$. Dann ist S_∞ ein polnischer Raum denn S_∞ ist Π_2^0:

Sei $x \in \mathcal{N}$ es gilt $x \in S_\infty$ genau dann wenn $\forall n \forall m \neq n : x(m) \neq x(n)$ und $\forall n \exists m : x(m) = n$.

Seien $n, m \in \mathbb{N}$ fest und

$$A_{m,n} = \{x \in \mathcal{N} : x(m) \neq x(n)\} \qquad B_{m,n} = \{x \in \mathcal{N} : x(m) = n\}$$

Die $A_{m,n}$ sind offen und abgeschlossen in $\mathcal{N}$ denn $A_{m,n} = \bigcup_{x\in A_{n,m}} N_{x|_{\sup\{n,m\}+1}}$ und $\complement_\mathcal{N} A_{m,n} = \bigcup_{x\in\complement_\mathcal{N} A_{m,n}} N_{x|_{\sup\{n,m\}+1}}$. $B_{m,n}$ genauso, denn $B_{m,n} = \bigcup_{x\in B_{n,m}} N_{x|_{m+1}}$ und

$\complement_{\mathcal{N}} B_{m,n} = \bigcup_{x \in \complement_{\mathcal{N}} B_{m,n}} N_{x|_{m+1}}$

$$S_\infty = \underbrace{\left(\bigcap_{n \neq m} A_{m,n}\right)}_{\text{abgeschlossen}} \cap \overbrace{\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} B_{m,n}\right)}_{\text{offen}}\right)}^{\in \Pi_2^0(\mathcal{N})}$$

Dann ist $S_\infty \in \Pi_2^0(\mathcal{N})$.

3.3 Die Baire-Eigenschaft

Definition Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Der **Durchmesser von** A ist gegeben durch

$$\operatorname{diam}(A) := \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$$

Theorem 3.8 (Bairescher Kategoriensatz)
Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei O_n eine dichte offene Menge in X. Dann liegt $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$ dicht in X.

Beweis: Sei U eine beliebige offene Menge in X.
z.z. $U \cap \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n\right) \neq \emptyset$.
Wir konstruieren zu jedem n eine Menge V_n mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $\overline{V_{n+1}} \subseteq V_n$

(ii) $\operatorname{diam}(V_n) \leq \frac{1}{2^n}$

(iii) $V_n \subseteq O_n \cap U$

(iv) $V_n \neq \emptyset$

Falls wir eine solche Folge V_n haben, wähle man eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in V_n$ für jedes n. Sei n eine natürliche Zahl, dann $(x_i)_{i \geq n}$ eine Folge in V_n und da $\operatorname{diam}(V_n) < \frac{1}{2^n}$ ist $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Dann Konvergiert (x_n) gegen $a \in X$. Da $(x_i)_{i \geq n}$ folge in V_n bzw. $\overline{V_n}$ ist, ist $a \in \overline{V_n} \subseteq V_{n-1}$. Dann gilt aber $a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n \subseteq \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n\right) \cap U$.
Wir definieren die V_n durch Induktion:

$n = 0$ Sei $x \in U \cap O_0$ und sei $\varepsilon > 0$, sodass $B(x, \varepsilon[\subseteq U \cap O_0$.
Sei $V_0 = B(x, \inf\{\frac{1}{2}, \varepsilon\}[$.

$n \rightsquigarrow n+1$ V_n ist offen mit den obigen Eigenschaften. Wir konstruieren eine Offene Menge V_{n+1} wie folgt. O_{n+1} ist dicht und V_n offen, dann ist $V_n \cap O_{n+1}$ nicht Leer. Aber O_{n+1} ist offen und somit auch $V_n \cap O_{n+1}$. Sei $x \in V_n \cap O_{n+1}$ und $\varepsilon > 0$ sodass $B(x, \varepsilon[\subseteq V_n \cap O_{n+1}$. Dann ist $V_{n+1} := B(x, \inf\{\varepsilon/2, \frac{1}{2^{n+2}}\}[$.

Denn dann ist $\overline{V_{n+1}} \subseteq B(x, \varepsilon[\subseteq V_n$ es gilt $\operatorname{diam}(V_{n+1}) \leq \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^{n+2}} = \frac{1}{2^{n+1}}$.
$V_{n+1} \subseteq O_{n+1} \cap U$ weil $V_{n+1} \subseteq O_{n+1} \cap V_n \subseteq O_{n+1} \cap O_n \cap U$. □

Definition $A \subseteq X$ ist **nirgends dicht** gdw. das Innere von $\overline{A}$ leer ist.

Theorem 3.9 (Baire)
Sei X ein vollständig metrischer Raum und $(F_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Familie von nirgends dichten Teilmengen von X. Dann ist $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i \subsetneq X$

Bemerkung Sei K ein Kompakter und metrischer Raum und X ein metrischer Raum. Sei $f : K \to X$ stetig.

(i) $f(K)$ ist Kompakt

(ii) Falls f injektiv ist, dann ist f ein Homöomorphismus von $K \to f(K)$

(iii) $\operatorname{diam}(K) < \infty$

(iv) $\mathcal{F} := \{f \mid f : K \to \mathbb{R} \text{ stetig }\}$ auf $\mathcal{F}$ definiert man $d(f, g) := \max\{|f(x) - g(x)| : x \in K\}$. Dies wohldefiniert, da $f(K)$ und $g(K)$ beschränkt.

$\mathcal{F}$ ist vollständig. Denn: Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{F}$. Sei $x \in K$. Dann ist $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ und konvergiert gegen ein $f(x)$.

z.z. $f_n \to f$ (in $\mathcal{F}$) Sei $\varepsilon > 0$. Weil $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge gibt es ein n_0 sodass für alle $n > n_0$ $\max\{|f_{n_0}(x) - f_n(x)|\} < \varepsilon$. Dann gilt für alle x dass $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Dann $d(f_n, f) < \varepsilon$.

$f \in \mathcal{F}$ (f ist stetig) Sei $x \in K$, $\varepsilon > 0$ und n_0 sodass für alle $n > n_0$ $d(f, f_n) < \frac{\varepsilon}{4}$. Außerdem gilt, dass für alle n auch $f_n \in \mathcal{F}$ ist und dass die f_n stetig in x sind. Sei U eine Umgebung um $x \in K$, sodass für jedes $y \in U$ auch $|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{4}$.

z.z. ist dass dann für jedes $y \in U$ auch $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(y) + f_n(y) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &\leq \frac{3}{4}\varepsilon < \varepsilon \end{aligned}$$

Sei nun K abzählbar, metrisch und kompakt. Dann ist K homöomorph zu einer Teilmenge von $\mathbb{R}$. Nach der Bemerkung (ii) reicht es zu zeigen, dass es ein injektives $f \in \mathcal{F}$ gibt.

„Beweis“ Für $i < j \in \mathbb{N}$ sei

$$X_{i,j} = \{f \in \mathcal{F} : f(x_i) = f(x_j)\}$$

- die $X_{i,j}$ sind abgeschlossen, denn sei $g \in \mathcal{F}$ mit $g \notin X_{i,j}$ dann gilt $g(x_i) \neq g(x_j)$ und sei ε so dass $|g(x_i) - g(x_j)| \geq \varepsilon$. Dann sei $U = B(g, \frac{\varepsilon}{2}[$. Dann ist $U \cap X_{i,j} = \emptyset$.
- Die $X_{i,j}$ haben ein leeres Inneres: Sei $f \in X_{i,j}$ daher $f(x_i) = f(x_j)$. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Es reicht zu zeigen, dass es in $B(f, \varepsilon[$ ein g gibt, sodass $g \notin X_{i,j}$, denn dann kann f kein Innerer Punkt sein.

  Sei $\delta = \operatorname{diam}(K)$. Sei $g : K \to \mathbb{R}$ mit

  $$x \mapsto f(x) + \frac{d(x, x_i)}{\delta} \frac{\varepsilon}{2}.$$

  g ist stetig und es gilt für alle x dass $|g(x) - f(x)| \leq \frac{d(x,x_i)}{\delta} \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ und folglich $g \in B(f, \varepsilon[$. $g \notin X_{i,j}$ weil $f(x_i) = g(x_i)$ und

  $$g(x_j) = f(x_i) + \frac{d(x_j, x_i)}{\delta} \frac{\varepsilon}{2} = g(x_i) + \underbrace{\frac{d(x_j, x_i)}{\delta} \frac{\varepsilon}{2}}_{>0}$$

- Alle $X_{i,j}$ sind dann nirgends dichte Mengen. Nach Baire-Eigenschaft gilt $\bigcup_{i,j \in \mathbb{N}} X_{i,j} \subsetneq \mathcal{F}$.

Definition Sei X topologischer Raum und $a \in X$. $\{a\}$ heißt **isoliert in** X genau dann, wenn $\{a\}$ offen in X.

Definition Sei X topologischer Raum und $Y \subseteq X$. Dann ist Y **perfekt** genau dann, wenn Y abgeschlossen ist und keine isolierten punkte hat.

Theorem 3.10
Sei X polnisch, dann gibt es Teilmengen $P, A \subseteq X$ sodass $X = P \cup A$ mit P ist perfekt und A ist offen und abzählbar.
Diese Zerlegung ist eindeutig.

Bemerkung Sei X ein topologischer Raum, dann gilt „Baire“ für X genau dann, wenn „Baire“ für jede Offene Teilmenge gilt.

Beweis: Sei X polnisch. X ist separabel. Sei $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare Basis der Topologie von X. Sei $A = \bigcup_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ |U_i| \leq \aleph_0}} U_i$. A ist abzählbare Vereinigung abzählbarer offener Mengen und demzufolge abzählbar und offen. Sei $P = X \setminus A$. A ist dann die Menge von Punkten x die eine abzählbare Umgebung besitzen und P die Menge von Punkten x, deren Umgebungen alle überabzählbar sind.

P **ist perfekt** denn Sei $a \in P$, dann ist $\{a\}$ nicht offen in P, denn sonst gäbe es eine Umgebung U mit $P \cap U = \{a\}$. U ist offen, $a \in U$ und $a \in P$, dann ist U überabzählbar. Da aber $U \cap P = \{a\}$ ist muss $U \subseteq A \cup \{a\}$ gelten, letzteres ist aber abzählbar. Ψ

Eindeutigkeit: Seien $P', A' \subseteq X$, sodass P' perfekt und A' offen und abzählbar mit $X = P' \cup A'$. Zu zeigen ist $P = P'$ und $A = A'$.

Es gilt $A' \subseteq A$ denn sei $x \in A'$. x besitzt die offene abzählbare Umgebung A'. $x \in A$.

Es gilt $P' \subseteq P$, denn sei nun $x \in P'$. Zeigen dass jede Umgebung von x überabzählbar ist. Andernfalls existiert eine offene Umgebung N von x in X, die abzählbar ist. Dann ist $N \cap P'$ eine offene abzählbare nicht-leere Teilmenge von P'. Nicht-leer ist sie, da $x \in N \cap P' =: N'$.

N' ist abzählbar daher $N' = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$. Dann $N' = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{x_i\}$. P' ist Perfekt, dann ist P' abgeschlossen in X und demzufolge auch polnisch. In P' gilt „Baire" aber N' ist offene Teilmenge von P' und damit gilt „Baire" auch in N' und folglich können nicht alle $\{x_i\}$ eine leeres Inneres haben. Es gibt also ein in P' offenes $\{x_{i_0}\}$ und dementsprechend kann P' nicht perfekt sein. Ψ

Wenn nun $P' \subseteq P$, $A' \subseteq A$, $P \cap A = \emptyset$ und $P \cup A = P' \cup A'$ ist, dann gilt auch $P' = P$ und $A' = A$. $\square$

3.4 Baire- und Cantorschemata

Bemerkung Wir werden zeigen dass:
Wenn X polnisch mit $|X| > \aleph_0$, dann gibt es eine stetig bijektive Abbildung $g : \mathcal{C} \to X$ und es existiert ein abgeschlossenes F in $\mathcal{N}$ sodass es eine bijektive stetige Abbildung $f : F \to X$. Es gibt eine surjektive Abbildung von $\mathcal{N}$ auf X.

Bemerkung Man kann sich $\mathcal{C}$ auch als Baum vorstellen, dabei betrachtet als Knoten die endlichen Folgen in $\{0, 1\}$ auf den Knoten definiert man dann eine Partielle Ordnung $s \leq s'$ wenn $|s| \leq |s'|$ und $s' \mid_{|s|}= s$. Die Maximalen Knoten sind dann die Zweige / Pfade durch den Baum und sie stellen dann unendliche Folgen von 0en und 1en dar, also die Elemente aus $\mathcal{C}$. Basiselemente der Topologie entsprechen genau den (nicht maximalen) Knoten.

Definition Ein **Baum** ist eine geordnete Menge $(T, \leq)$ sodass

- für jedes $a \in T$ ist die Menge $\{x \in T : x \leq a\}$ Total geordnet.
- für jedes paar $a, b \in T$ existiert $\inf\{a, b\}$ (daher der Punkt an den die Pfade von a und b sich verzweigen.)

Ein Element von T heißt **Knoten**. Eine maximale Kette von T heißt **Zweig** oder **Pfad**.

Notation $Z(T)$ ist die Menge aller Zweige von T.

Beispiel Sei A eine Menge (z.B. $A = \{0,1\}$ oder $A = \mathbb{N}$). Auf $A^{<\aleph_0}$ definiert man eine partielle Ordnung durch $s \leq s'$ genau dann wenn $s' \mid_{|s|}= s$. Dann ist $A^{<\aleph_0}$ ein Baum.

Auf $Z(T)$ definieren wir die Basis für eine Topologie.

Definition Für $x \in Z(T)$ und $n \in T$ mit $n \in x$ sei

$$B(x,n) := \{z \in Z(T) : z \cap x \text{ hat ein Element, das größer als } n \text{ ist } \}$$

Theorem 3.11
Sei $A = \{0,1\}$ bzw. $A = \mathbb{N}$ dann ist $Z(A^{<\aleph_0})$ homöomorph zu $\mathcal{C}$ bzw. zu $\mathcal{N}$. $\mathcal{C} \to Z(2^{<\aleph_0})$ durch

$$(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) \mapsto \{(x_0), (x_0, x_1), \dots, (x_0, \dots, x_n), \dots\}$$

Definition Sei X ein polnischer Raum. Ein **Cantor-Schema** für X ist eine Familie $(F_s)_{s \in 2^{<\aleph_0}}$ von Teilmengen von X mit folgenden Eigenschaften:

- $F_s \neq \emptyset$ für jedes $s \in 2^{<\aleph_0}$
- für jedes $s \in 2^{<\aleph_0}$ und $i \in \{0,1\}$ ist $\overline{F_{s \wedge i}} \subseteq F_s$
- für jedes $s \in 2^{<\aleph_0}$ und $\{i,j\} = \{0,1\}$ ist $F_{s\wedge i} \cap F_{s \wedge j} = \emptyset$
- für jedes $x \in \mathcal{C}$ gilt $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_{x|_n}) = 0$

Bemerkung Als Baum betrachtet $\overline{F_{000}} \subseteq F_{00}$, $\overline{F_{001}} \subseteq F_{00}$ und $F_{000} \cap F_{001} = \emptyset$. Alle Mengen auf einer Ebene sind disjunkt.

Definition Sei (X,d) ein polnischer Raum. Ein **Baire-Schema** für X ist eine Familie $(F_s)_{s \in \mathbb{N}^{<\aleph_0}}$, wenn

(a) $\overline{F_{s\wedge i}} \subseteq F_s$ für jedes $i \in \mathbb{N}$ und $s \in \mathbb{N}^{<\aleph_0}$

(b) für jedes $s \in \mathbb{N}^{<\aleph_0}$ und $i,j \in \mathbb{N}$ und $i \neq j$ gilt $F_{s\wedge i} \cap F_{s\wedge j} = \emptyset$

Man sagt, dass das **Schema konvergiert** genau dann, wenn

(c) Für jedes $x \in \mathcal{N}$ gilt $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_{x|_n}) = 0$

Man sagt, dass das **Schema surjektiv** ist genau dann, wenn

(d) $F_\emptyset = X$ und für jedes $s \in \mathbb{N}^{<\aleph_0}$ auch $F_s = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_{s\wedge i}$

Bemerkung Man muss leere F_s zulassen, da sonst das Theorem „Jeder Polnische Raum hat ein Baire-Schema" nicht beweisbar ist.

Theorem 3.12
Sei (X,d) ein polnischer Raum und $(F_s)_{s\in 2^{<\aleph_0}}$ ein Cantorschema auf X. Sei $g : \mathcal{C} \to X$ definiert durch $\{g(x)\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{x|_n}$. Dann ist g wohldefiniert, stetig und injektiv.

Beweis: Der Beweis folgt analog zu dem Beweis des folgenden Theorems. □

Theorem 3.13
Sei (X, d) ein polnischer Raum und $(F_s)_{s\in\mathbb{N}^{<\aleph_0}}$ ein konvergentes Baire-schema für X.

$$\text{Sei } D := \{x \in \mathcal{N} : \text{ sodass für jedes } n\ F_{x|_n} \neq \emptyset\}$$

Sei $g : D \to X$ definiert durch $\{g(x)\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{x|_n}$. Dann ist D abgeschlossen und g ist wohldefiniert, injektiv und stetig auf D. Ist das Schema surjektiv, dann ist g surjektiv.

Beweis: Zuerst zur Abgeschlossenheit von D in $\mathcal{N}$:

Sei $a \in \overline{D}$ zu zeigen ist dann, dass $a \in D$ bzw. dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ auch $F_{a|_n} \neq \emptyset$.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ beliebig fixiert. Betrachte die Umgebung $N_{a|_n}$. Dann ist da $N_{a|_n}$ Umgebung von a ist auch $N_{a|_n} \cap D$ nicht leer und es gibt ein $y \in N_{a|_n} \cap D$. Da $y \in D$, gilt auch $F_{y|_n} \neq \emptyset$. Nun ist aber $y\ |_n = a\ |_n$ und somit auch $F_{y|_n} = F_{a|_n} \neq \emptyset$

Nun zeige man, dass g wohldefiniert auf D ist. Sei $x \in D$ es gilt zu zeigen, dass $\left|\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{x|_n}\right| = 1$. Der Schnitt kann nicht mehr als ein Element haben, weil der Durchmesser gegen 0 geht.

Denn für $n \geq m$ gilt $F_{x|_n} \subseteq F_{x|_m}$ Dann sind die $(F_{x|_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Kette von Teilmengen von X und es gilt $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_{x|_n}) = 0$ weil das Schema konvergent ist.

Der Schnitt ist auch nicht Leer:

$x \in D$ also sei für alle $n \in \mathbb{N}$ auch $F_{x|_n} \neq \emptyset$. Sei $x_n \in F_{x|_n}$. Dann ist (x_n) eine Folge in X. Seien $n \geq p$ dann ist $x_p \in F_{x|_p} \subseteq F_{x|_n}$. Also ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ $(x_p)_{p\geq n} \subseteq F_{x|_n}$, aber der Durchmesser von $F_{x|_n}$ konvergiert gegen 0, also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und da X ein polnischer Raum konvergiert die Folge gegen ein $a \in X$. Sei $n \in \mathbb{N}$ dann $(x_p)_{p\geq n+1}$ eine Folge in $F_{x|_{n+1}}$ die gegen a konvergiert. Also $a \in \overline{F_{x|_{n+1}}} \subseteq F_{x|_n}$ und somit $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{x|_n} \neq \emptyset$.

g ist injektiv

Seien $x, y \in D$ mit $x \neq y$. Sei n_0 das kleinste n für dass $x_n \neq y_n$. Dann ist $x\ |_{n_0} = y\ |_{n_0}$ und $x\ |_{n_0+1} \neq y\ |_{n_0+1}$. Folglich ist $g(x) \in F_{x|_{n_0+1}} = F_{x|_{n_0} \wedge x_{n_0}}$ und $g(y) \in F_{y|_{n_0+1}} = F_{x|_{n_0} \wedge y_{n_0}}$ und $y_{n_0} \neq x_{n_0}$ und da der Schnitt von $F_{x|_{n_0} \wedge y_{n_0}}$ und $F_{x|_{n_0} \wedge x_{n_0}}$ dann leer ist, folgt $g(x) \neq g(y)$.

g ist stetig

Sei $x \in D$ und $\varepsilon > 0$. Wir wissen $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_{x|_n}) = 0$. Wählen n_0 so dass $\operatorname{diam}(F_{x|_{n_0}}) < \varepsilon$. $N_{x|_{n_0}}$ ist eine Umgebung von x und für alle $y \in N_{x|_{n_0}}$ gilt $x\ |_{n_0} = y\ |_{n_0}$ also $g(y) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{y|_n}$ und somit in $g(y) \in F_{y|_{n_0}} = F_{x|_{n_0}}$. Da auch $g(x) \in F_{x|_{n_0}}$ und $\operatorname{diam}(F_{x|_{n_0}}) < \varepsilon$ folgt schließlich $d(g(x), g(y)) < \varepsilon$.

g ist surjektiv wenn $(F_s)_{s\in\mathbb{N}^{<\aleph_0}}$ surjektiv ist.

Sei $a \in X$, dann ist $a \in F_\emptyset = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_{(n)}$. Sei $s_0 \in \mathbb{N}$ dass n mit $a \in F_{(n)}$. Dann ist $F_{(s_0)} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_{(s_0)\wedge n}$ und s_1 sei dass $n \in \mathbb{N}$ mit $a \in F_{(s_0,n)}$. Per Induktion Konstruiert man ein $s := (s_0, s_1, \dots) \in \mathcal{N}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ auch $a \in F_{s|_n}$. Dann aber ist $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{s|_n}$. Aber der Schnitt enthält höchstens ein Element und somit $\{g(s)\} = \{a\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{s|_n}$ und g ist surjektiv.

□

Theorem 3.14
Sei X ein polnischer Raum mit $|X| > \aleph_0$. Dann gibt es ein stetiges und injektives $g : \mathcal{C} \to X$.
Insbesondere ist dann $|X| = 2^{\aleph_0}$.

Beweis: Es reicht zu zeigen, dass es ein Cantor-Schema für X gibt. Sei $X = P \dot\cup A$ mit P ist Perfekt und A offen und abzählbar. Da $|X| > \aleph_0$ ist, kann P nicht leer sein. Und P ist abgeschlossen (da A offen ist). Folglich ist P polnisch daher o.B.d.A. sei X perfekt. Man konstruiert $(F_s)_{s\in\{0,1\}^{<\aleph_0}}$ durch Induktion über die Länge von s. Wir konstruieren alle F_s so, dass sie offene Kugeln sind.

- Für $F_\emptyset$ nimmt man Irgendeine nicht leere offene Kugel vom Radius $\leq \frac{1}{2}$.
- Seien die F_s für $|s| \leq n$ schon konstruiert. Sei s mit $|s| = n$ und $a, b \in F_s$ und $a \neq b$. Dies geht, da F_s offene Kugel ist und X perfekt.

  Sei $\varepsilon > 0$ sodass $\varepsilon \leq \frac{1}{2^{n+2}}$ und $B(a,\varepsilon) \cap B(b,\varepsilon) = \emptyset$ sowie $\overline{B(a,\varepsilon)} \subseteq F_s$ und $\overline{B(b,\varepsilon)} \subseteq F_s$. Setze dann $F_{s\wedge 0} = B(a,\varepsilon)$ und $F_{s\wedge 1} = B(b,\varepsilon)$.

Man macht dies für alles $s \in \{0,1\}^{<\aleph_0}$ mit $|s| \leq n+1$. Durch Induktion erhält man ein Cantor-Schema für X.

□

Korollar 3.15
Sei X polnisch mit $|X| > \aleph_0$, dann ist $|X| \geq 2^{\aleph_0}$.

Theorem 3.16
Sei X ein polnischer Raum. Dann gibt es ein $F \subseteq \mathcal{N}$ welches abgeschlossen und ein stetiges, bijektives $g : F \to X$.
Insbesondere gibt es dann ein stetiges surjektives $g : \mathcal{N} \to X$

Beweis: Es reicht ein surjektives, konvergentes Baire-Schema auf X zu finden. Es ist Möglich ein solches Schema $(F_s)_{s\in\mathbb{N}^{<\aleph_0}}$ zu konstruieren sodass alle F_s auch Σ^0_2 Mengen von X sind. Wir definieren durch Induktion auf $|s|$. Es reicht zu zeigen dass es für jede Σ^0_2-Menge θ und jedes ε eine disjunkte Zerlegung $(\theta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gibt, sodass $\theta = \dot\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \theta_i$ und $\mathrm{diam}(\theta_i) < \varepsilon$. Zeigen nun dass es für jedes $\theta \in \Sigma^0_2(X)$ und $\varepsilon > 0$ eine Familie $(\theta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gibt sodass alle $\theta_i \in \Sigma^0_2$, $\theta = \dot\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \theta_i$ und $\mathrm{diam}(\theta_i) < \varepsilon$.

Sei $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine dichte Teilmenge von θ. Dann ist $\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B(x_i,\frac{\varepsilon}{3}[\right)\cap\theta=\theta$ da x_i dicht in θ sind. Sei nun für jedes $i\in\mathbb{N}$

$$C_i := \left(B(x_i,\tfrac{\varepsilon}{3}[\setminus\left(\bigcup_{j<i} B(x_j,\tfrac{\varepsilon}{3})\right)\right)\cap\theta$$

Dann sind die C_i disjunkt per Definition und

$$\operatorname{diam}(C_i)\le\operatorname{diam}(B(x_i,\tfrac{\varepsilon}{3}[)\le\tfrac{2}{3}\varepsilon<\varepsilon.$$

Die C_i sind Σ_2^0 und wenn A und B Σ_2^0 ist, dann auch $A\cap B$. Denn sei $A=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}F_i$ und $B=\bigcup_{j\in\mathbb{N}}F'_j$ wobei die F_i,F'_j abgeschlossen sind, dann ist $A\cap B=\bigcup_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}(F_i\cap F'_j)$ und $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ist abzählbar. Damit ist dann auch C_i in Σ_2^0, denn

$$B(x_i,\tfrac{\varepsilon}{3}[\setminus\left(\bigcup_{j<i}B(x_j,\tfrac{\varepsilon}{3})\right)=\underbrace{B(x_i,\tfrac{\varepsilon}{3}[}_{\text{offen}\Rightarrow\Sigma_2^0}\cap\underbrace{\complement_X\left(\bigcup_{j<i}B(x_j,\tfrac{\varepsilon}{3})\right)}_{\text{abgeschl. }\Rightarrow\Sigma_2^0}\in\Sigma_2^0$$

Nach dem, was wir gerade gezeigt haben, kann man ein konvergentes surjektives Baire-Schema $(F_s)_{s\in\mathbb{N}^{<\aleph_0}}$ aus Σ_2^0 Mengen konstruieren, dem nur noch die Eigenschaft (a) $\overline{F_{s\wedge i}}\subseteq F_s$ fehlt.

Um auch die Eigenschaft (a) zu bekommen nimmt man eine Σ_2^0 Menge für F_s diese lässt sich dann als $F_s=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}K_i$ darstellen, wobei K_i abgeschlossen in X sind. Man definiert $K'_i:=K_i\setminus\left(\bigcup_{j<i}K_j\right)$. Die K'_i sind disjunkt und Σ_2^0. Für jedes ε gibt es nach der obigen Aussage eine Menge von disjunkten Σ_2^0 Mengen $E_{i,j}$ mit $K'_i=\bigcup_{j\in\mathbb{N}}E_{i,j}$ und $\operatorname{diam}(E_{i,j})<\varepsilon$. Dann kann man $F_s=\bigcup_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}E_{i,j}$ setzen und die $E_{i,j}$ sind disjunkt mit $\overline{E_{i,j}}\subseteq\overline{K'_i}\subseteq\overline{K_i}=K_i\subseteq F_s$. Man setzte dann $F_{s\wedge k}:=E_{i_k,j_k}$ für eine Abzählung $((i_k,j_k))_{k\in\mathbb{N}}$ von $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Durch Induktion über $|s|$ erhält man auf diese Weise eine konvergentes, surjektives Baire-Schema, wenn man zum Beispiel $\varepsilon=\frac{1}{2^{|s|+1}}$ wählt. □

Korollar 3.17
Sei X ein polnischer Raum, dann ist $|X|\le 2^{\aleph_0}$ und für $|X|>\aleph_0$ gilt $|X|=2^{\aleph_0}$.

4 Die Borel-Hierarchie

4.1 Überblick zum Kapitel und Allgemeines

Definition Sei (X,τ) ein topologischer Raum.

- $\Sigma_1^0(X)$ (bzw. $\Sigma_1^0(\tau)$) als die Menge der Offenen Mengen von X

- Für $\alpha \in \aleph_1$ definiert $\Pi^0_\alpha(X)$ bzw. $(\Pi^0_\alpha(\tau))$ als die Menge von Teilmengen von X deren Komplemente in $\Sigma^0_\alpha(X)$ liegen

$$\Sigma^0_\alpha := \{A \subseteq X : A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i \text{ und } K_i \in \Pi^0_{\beta_i} \text{ für } \beta_i < \alpha\}$$

- **die Borel σ-Algebra** ist dann $\mathcal{B}(X)$ (bzw. $\mathcal{B}(\tau)$) mit $\mathcal{B}(X) = \bigcup_{\alpha \in \aleph_1} \Sigma^0_\alpha(X)$
- Es folgt die projektive Hierarchie Σ^1_n, Π^1_n für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \Sigma^1_1 &= \{f(A) : A \in \mathcal{B}(X), f : X \to X \text{ stetig } \} \\ \Sigma^1_{n+1} &= \{f(A) : A \in \Pi^1_n \text{ und } f : X \to X \text{ stetig } \} \\ \Pi^1_n &= \{\complement_X A : A \in \Sigma^1_n\} \end{aligned}$$

Bemerkung Im folgenden ignorieren wir stets, dass $\alpha = 0 \in \aleph_1$, da man statt Σ^0_1 auch Σ^0_0 bzw. statt Σ^0_{n+1} auch Σ^0_n für $n \in \omega$ schreiben könnte.

Im diesem Abschnitt wollen wir die Folgenden Theoreme beweisen:

Theorem Seien $\alpha, \beta \in \aleph_1$ mit $\alpha < \beta$ dann ist $\Sigma^0_\alpha \subseteq \Sigma^0_\beta$, $\Sigma^0_\alpha \subseteq \Pi^0_\beta$, $\Pi^0_\alpha \subseteq \Sigma^0_\beta$ und $\Pi^0_\alpha \subseteq \Pi^0_\beta$.

Theorem $\mathcal{B}(X)$ ist die σ-Algebra, die durch die Topologie von X erzeugt ist.

Theorem Sei (X, τ) ein polnischer Raum. Sei $A \in \mathcal{B}(X)$. Dann gibt es eine polnische Topologie τ' auf X, sodass $\mathcal{B}(\tau) = \mathcal{B}(\tau')$, $\tau \subseteq \tau'$ und A ist abgeschlossen und offen in (X, τ').

Theorem
- ist $|X| > \aleph_0$ dann gilt für alle $\alpha \in \aleph_1$ dass $\Sigma^0_\alpha \subsetneq \Sigma^0_{\alpha+1}$
- ist $|X| > \aleph_0$ dann gilt für alle $\alpha \in \aleph_1$ dass es ein $A \in \Pi^0_\alpha$ gibt welches nicht in Σ^0_α ist.

Theorem (Suslin) Sei X polnisch und $|X| > \aleph_0$, dann gibt es ein $A \in \Sigma^1_1(X)$ welches keine Borel-Menge ist.

Theorem (Lusin's separation Theorem)
X ein polnischer Raum. Wenn $A, B \in \Sigma^1_1(X)$ dann gibt es ein $\theta \in B(X)$ mit $A \subseteq \theta$ und $B \cap \theta = \emptyset$.

Korollar $\Sigma^1_1(X) \cap \Pi^1_1(X) = \mathcal{B}(X)$

Theorem 4.1
Sei X polnisch. Dann gilt für $\alpha, \beta \in \aleph_1$ mit $\alpha < \beta$ sowohl $\Sigma^0_\alpha \subseteq \Sigma^0_\beta$, $\Pi^0_\alpha \subseteq \Pi^0_\beta$ sowie $\Sigma^0_\alpha \subseteq \Pi^0_\beta$ und $\Pi^0_\alpha \subseteq \Sigma^0_\beta$.

Beweis: $\Pi^0_\alpha \subseteq \Sigma^0_\beta$ folgt direkt aus der Definition. $\Sigma^0_\alpha \subseteq \Pi^0_\beta$ folgt dann, da für alle $\gamma \in \aleph_1$ gilt, dass $\complement_X A \in \Sigma^0_\gamma$ genau dann ist, wenn $A \in \Pi^0_\gamma$ ist.

Es reicht $\Sigma^0_\alpha \subseteq \Sigma^0_\beta$ weil dann $\Pi^0_\alpha \subseteq \Pi^0_\beta$ aus dem selben Grund wie $\Sigma^0_\alpha \subseteq \Pi^0_\beta$ folgt.

Für $\alpha = 1$ und $\beta = 2$ wurde schon bewiesen, dass $\Pi^0_1 \subseteq \Pi^0_2$. Sei F abgeschlossen, daher $F \in \Pi^0_1(X)$, dann ist $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{x\in F} B(x, \frac{1}{n}[\right)$ und damit in Π^0_2.

Für $\alpha > 1$ ist dies klar, denn Σ^0_α ist nach Definition

$$\Sigma^0_\alpha = \left\{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} a_i : a_i \in \Pi^0_\gamma, \gamma < \alpha\right\} \subseteq \left\{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} a_i : a_i \in \Pi^0_\gamma, \gamma < \beta\right\} = \Sigma^0_\beta$$

da aus $\gamma < \alpha$ und $\alpha < \beta$ auch $\gamma < \beta$ folgt. □

Theorem 4.2
Sei X polnisch, dann ist $\mathcal{B}(X)$ die σ-Algebra auf $\wp(X)$ die durch die Topologie von X erzeugt wird.

Beweis: $\mathcal{B}(X)$ ist eine σ-Algebra.

$A \in \mathcal{B}(X) \Rightarrow \complement_X A \in \mathcal{B}(X)$:
: Sei $A \in \mathcal{B}(X)$ dann gibt es ein $\alpha \in \aleph_1$ mit $A \in \Sigma^0_\alpha$, dann ist $\complement_X A \in \Pi^0_\alpha$ und $\complement_X A \in \Sigma^0_{\alpha+1} \subseteq \mathcal{B}(X)$.

$(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}(X) \Rightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{B}(X)$:
: Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen aus $\mathcal{B}(X)$. Dann gibt es $\alpha_i \in \aleph_1$ mit $A_i \in \Sigma^0_{\alpha_i}$. folglich gibt es ein $\beta = \sup\{\alpha_i : i \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i$. Da β Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Ordinalzahlen ist, ist β auch abzählbare Ordinalzahl und somit $\beta \in \aleph_1$. Dann ist $\beta + 1 \in \aleph_1$ und $\alpha_i < \beta + 1$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Folglich sind die $A_i \in \Sigma^0_{\beta+1}$ und damit auch $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \Sigma^0_{\beta+1} \subseteq \mathcal{B}(X)$.

Nun Es gilt zu zeigen, dass $\mathcal{B}(X)$ die kleinste σ-Algebra ist, die die offenen Mengen enthält.

Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra, die die offenen Mengen enthält, es reicht zu zeigen, dass $\Sigma^0_\alpha \subseteq \mathcal{A}$ für jedes $\alpha \in \aleph_1$. Zeigen dies per Induktion über $\alpha \in \aleph_1$

$\alpha = 1$ $\Sigma^0_1 \subseteq \mathcal{A}$ nach Voraussetzung, denn Σ^0_1 sind offen. $\Pi^0_1 \subseteq \mathcal{A}$ da $\mathcal{A}$ abgeschlossen gegenüber Komplementen ist.

$\alpha > 1$ Sei also $\alpha \in \aleph_1$ mit $\alpha > 1$. Für alle $\beta < \alpha$ sei $\Pi^0_\beta \cup \Sigma^0_\beta \subseteq \mathcal{A}$ schon gezeigt. Dann ist $\Sigma^0_\alpha \subseteq \mathcal{A}$, denn $\mathcal{A}$ ist abgeschlossen gegenüber abzählbarer Vereinigung und $\Pi^0_\beta \subseteq \mathcal{A}$. Es ist auch $\Pi^0_\alpha \subseteq \mathcal{A}$ da $\mathcal{A}$ abgeschlossen gegenüber Komplementbildung. □

4.2 Erweiterung Polnischer Topologien

Theorem 4.3
Sei (X,τ) polnisch und $B \in \mathcal{B}(X)$. Dann gibt es eine Topologie τ' auf X, sodass die folgenden Eigenschaften $E(\tau,\tau',B)$ gelten:

- $\tau \subseteq \tau'$
- $\mathcal{B}(\tau') = \mathcal{B}(\tau)$
- (X,τ') *ist Polnisch*
- B *ist offen und abgeschlossen in* τ'

Beweis: Man beweist, dass

$$\mathcal{M} = \{A \in \wp(X) : \text{ sodass es ein } \tau' \text{ mit } E(\tau,\tau',A) \text{ gibt } \}$$

eine σ-Algebra ist, die τ enthält.

Da dann folgt dann dass $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{M}$. Da für alle $A \in \mathcal{M}$ auch für ein τ' die Eigenschaft $E(\tau,\tau',A)$ gilt, dass $A \in \tau' \subseteq \mathcal{B}(\tau') = \mathcal{B}(\tau) = \mathcal{B}(X)$ folgt dann auch $\mathcal{B}(X) = \mathcal{M}$. □

Lemma 4.4
Sei O offen in (X,τ), dann ist $O \in \mathcal{M}$.

Beweis: Sei O offen in X, dann ist O auch Π^0_2 und somit gibt es eine Metrik d_1 auf O, die die Topologie von O definiert. O.B.d.A. sei $d_1 < 1$. Sei $F := \complement_X O$, dann ist F abgeschlossen und somit auch in $\Pi^0_2(X)$. F ist Polnisch und es gibt eine Metrik d_2 auf F, welche die Topologie von F definiert. o.B.d.A. sei $d_2 < 1$. Wir definieren eine neue Metrik auf X.

$$\begin{aligned} d: \quad X \times X &\rightarrow [0,\infty) \\ (x,y) &\mapsto \begin{cases} d_1(x,y) & ,(x,y) \in O^2 \\ d_2(x,y) & ,(x,y) \in F^2 \\ 1 & , \text{ sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Sei τ' die Topologie, welche durch d auf X definiert wird.

$\tau \subseteq \tau'$ Sei U offen in (X,τ). Dann ist $U \cap O$ offen in $(O, \tau\ |_O)$. Die Topologie von O wird von d_1 erzeugt und $d\ |_O = d_1$ und folglich ist $\tau\ |_O \subseteq \tau'$ und $U \cap O$ offen in (X,τ'). Analog ist $F \cap O$ offen in (X,τ') und folglich ist $U = (F \cap U) \cup (O \cap U)$ auch offen in (X,τ').

O **ist abgeschlossen und offen** Nach obiger Argumentation gilt für $U = X$, dass O und F offen in (X,τ') sind. Dann aber ist O offen und abgeschlossen in (X,τ').

$\mathcal{B}(\tau') = \mathcal{B}(\tau)$ Da $\tau \subseteq \tau'$ gilt auch $\mathcal{B}(\tau) \subseteq \mathcal{B}(\tau')$.

τ' wird von den $U \cap F$ und $U \cap O$ für $U \in \tau$ erzeugt. Die $U \cap O$ sind in τ da O offen in τ. Die $U \cap F$ sind in $\Pi^0_2(\tau)$ und damit auch in $\mathcal{B}(\tau)$. Dann aber ist $\mathcal{B}(\tau') \subseteq \mathcal{B}(\tau)$.

(X, d) **ist polnisch** Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in (X, d). Da $d(y, x) = 1$ wenn $(x, y) \in F \times O \cup O \times F$ muss es ein n_0 geben sodass für alle $n > n_0$ nur noch $x_n \in O$ oder aber nur noch $x_n \in F$ gilt. Demzufolge ist dann (x_n) Cauchy Folge in O (bzw. F). Aber es gilt $d\mid_O = d_1$ sowie $d\mid_F = d_2$ und beide sind vollständig. Also konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (X, d) und (X, d) ist vollständig. (X, d) ist separabel, denn wenn $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Basis von τ ist, dann ist

$$U_i' = \begin{cases} U_{\frac{i}{2}} \cap F & , i \text{ gerade} \\ U_{\frac{i-1}{2}} \cap U & , i \text{ ungerade} \end{cases}$$

eine abzählbare Basis für τ'. □

Lemma 4.5
Sei (X, τ) ein polnischer Raum.
Sei $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie von polnischen Topologien auf X, sodass $\tau \subseteq \tau_n \subseteq \mathcal{B}(\tau)$. Dann ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tau_n$ eine (Sub-)Basis einer polnischen Topologie τ' auf X mit $\mathcal{B}(\tau) = \mathcal{B}(\tau')$.

Beweis: Sei $X_n = (X, \tau_n)$ und $g : (X, \tau') \to \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ mit $a \mapsto (a, a, \dots)$. Da τ_n ist polnisch, ist dann X_n auch polnisch und folglich $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Außerdem ist $g(X, \tau')$ abgeschlossen in $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Denn sei $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \notin g(X)$, dann gibt es also $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $a_i \neq a_j$ und $i < j$. Da (X, τ) ein polnischer Raum ist, ist (X, τ) ein Hausdorff Raum und es gibt offene $U_i, U_j \in \tau$ mit $a_i \in U_i$ und $a_j \in U_j$ sowie $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Da $\tau \subseteq \tau_i$ und $\tau \subseteq \tau_j$ sind U_i in X_i bzw. U_j in X_j offen.
Sei

$$\theta = X_0 \times \dots \times X_{i-1} \times U_j \times X_{i+1} \times \dots \times X_{j-1} \times U_j \times X_{j+1} \times \dots$$

Dann ist θ offen in $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$. Es gilt $\theta \cap g(X) = \emptyset$ und folglich ist $g(X)$ abgeschlossen in $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$. Folglich ist $g(X)$ polnisch.
g ist ein Homöomorphismus von (X, τ') nach $g(X)$

i) Es ist klar, dass g bijektiv ist

ii) g ist stetig. Sei V eine offene Menge in $g(X)$, dann ist $V = V' \cap g(X)$ und V' ist offen in $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Dann gibt es endlich viele V_i offenen in X_{k_i} und o.B.d.A. seien die $k_i = i$ daher $V = V_0 \times \dots \times V_n \times X_{n+1} \times X_{n+2} \times \dots$. Dann ist $g^{-1}(V) = \bigcap_{i\leq n} V_i$ offen in τ' weil $U_i \in \tau_i \subseteq \tau'$.

iii) g ist offen. Sei U offen in (X, τ'), dann ist $U = \bigcup_{i \in \Lambda} \bigcap_{j<n_i} U_{i,j}$ wobei $U_{i,j} \in \tau_{k_j}$. Da das Bild Vereinigung erhält, daher $g\left(\bigcup_{i \in \Lambda} A_i\right) = \bigcup_{i \in \Lambda} g(A_i)$, sei o.B.d.A. $U = \bigcap_{i<n} U_i$ mit ebenfalls o.B.d.A. $U_i \in \tau_i$. Dann ist

$$g(U) = g(X) \cap U_0 \times U_1 \times \cdots \times U_{n-1} \times X_n \times X_{n+1} \times \ldots$$

und das ist offen in $g(X)$.

g ist ein Homöomorphismus von (X, τ') auf $g(X)$ und $g(X)$ ist polnisch, dann ist auch (X, τ') polnisch.

Es ist klar dass $\tau \subseteq \tau'$ und somit $\mathcal{B}(\tau) \subseteq \mathcal{B}(\tau')$, andersherum ist $\tau' = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \tau_n$ und die $\tau_n \subseteq \mathcal{B}(\tau)$. Dann aber ist auch $\tau' \subseteq \mathcal{B}(\tau)$ und somit $\mathcal{B}(\tau') \subseteq \mathcal{B}(\tau)$ □

Wir beweisen nun noch das Theorem 4.3.

Beweis: Wir Zeigen, dass

$$\mathcal{M} = \{A \subseteq X : \quad \text{es gibt eine Topologie } \tau' \text{ auf } X \text{ sodass } E(\tau, \tau', A)\}$$

eine σ-Algebra ist, die τ enthält.

- $\tau \subseteq \mathcal{M}$ nach Lemma 4.4
- $\mathcal{M}$ ist abgeschlossen gegenüber Komplementbildung per Definition, denn $A \in \mathcal{M}$ dann ist A abgeschlossen und offen in einer polnischen Topologie $\tau' \subseteq \mathcal{B}(\tau)$ und dann ist auch $\complement_X A$ abgeschlossen und offen in dieser Topologie und somit $\complement_X A \in \mathcal{M}$.
- $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Familie von Mengen aus $\mathcal{M}$. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine polnische Topologie $\tau_n \subseteq \mathcal{B}(\tau)$ für X sodass a_n offen und abgeschlossen in (X, τ_n) ist. Man definiert τ' wie im vorherigen Lemma als die Topologie, die von den $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tau_n$ erzeugt wird, dann sind alle a_n offen und abgeschlossen und dem zur Folge ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} a_n$ offen in (X, τ'). Nach dem ersten Lemma gibt es dann wieder ein $\tau'' \supseteq \tau'$ sodass
  - $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} a_n$ offen und abgeschlossen in (X, τ'')
  - τ'' ist polnisch
  - $\tau'' \supseteq \tau' \supseteq \tau$
  - $\tau'' \subseteq \mathcal{B}(\tau') = \mathcal{B}(\tau)$ und daher $\mathcal{B}(\tau'') = \mathcal{B}(\tau)$

Letztlich ist also $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} a_n \in \mathcal{M}$ und $\mathcal{M}$ ist also eine σ-Algebra, die τ enthält und somit $\mathcal{B}(\tau) \subseteq \mathcal{M}$. Da gemäß Definition $\mathcal{M}$ nur Mengen A enthält, die in einer Topologie enthalten sind, die ihrerseits in $\mathcal{B}(\tau)$ enthalten ist, folgt somit auch $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(\tau)$ und somit $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\tau)$. □

4.3 Charakterisierung der $\Sigma_1^1(X)$-Mengen

Theorem 4.6 (Alexandrov/Hausdorff)
Sei (X, τ) ein polnischer Raum. $B \in \mathcal{B}(\tau)$ mit $|B| > \aleph_0$

a) Dann gibt es ein stetiges und injektives $f : \mathcal{C} \to B$. f ist dann Homöomorphismus zwischen $\mathcal{C}$ und $f(\mathcal{C}) \subseteq B$

b) Es gibt eine Homöomorphismus zwischen $\mathcal{N}$ und einer Teilmenge von B.

> **Beweis:** Sei τ' eine polnische Topologie auf X mit $\tau \subseteq \tau'$, $\mathcal{B}(\tau) = \mathcal{B}(\tau')$ in der B offen und abgeschlossen ist.
>
> a) B ist dann Π_2^0 in (X, τ') und $(B, \tau' \mid_B)$ ist polnisch. B ist überabzählbar und folglich gibt es ein injektives, stetiges $f : \mathcal{C} \to (B, \tau')$. Nun ist $\tau' \mid_B \supseteq \tau \mid_B$ und folglich ist auch $f : \mathcal{C} \to (B, \tau)$ stetig und injektiv. Dann ist $f : \mathcal{C} \to f(\mathcal{C})$ bijektiv, stetig und ein Homöomorphismus, da $\mathcal{C} = \prod_{i \in \mathbb{N}} A_i$ für $A_i = \{0, 1\}$ Kompakt ist.
>
> b) $\mathcal{C}$ enthält eine Kopie von $\mathcal{N}$ und folglich gibt es ein Homöomorphismus $g : \mathcal{N} \to g(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{C}$ und $(f \circ g) : \mathcal{N} \to f(g(\mathcal{N})) \subseteq B$ ist der gesuchte Homöomorphismus.
> □

Theorem 4.7 (Suslin-Luzin)
Sei (X, τ) ein polnischer Raum und $B \in \mathcal{B}(\tau)$, dann gibt es ein stetig, surjektives $f : \mathcal{N} \to B$.

> **Beweis:** Sei τ' eine polnische Topologie auf X in der B offen und abgeschlossen und $\tau \supseteq \tau' \subseteq \mathcal{B}(\tau)$. Dann ist $B \in \Pi_2^0(\tau')$ und $(B, \tau' \mid_B)$ ist polnisch. Dann gibt es ein $f : \mathcal{N} \to (B, \tau' \mid_B)$ welches stetig und surjektiv ist. Und wieder da $\tau' \mid_B \supseteq \tau \mid_B$ ist auf $f : \mathcal{N} \to (B, \tau \mid_B)$ stetig und surjektiv. □

Bemerkung Sei X polnisch und abzählbar. Dann gilt für alle $A \subseteq X$ dass $A \in \Sigma_2^0$. Denn $X = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $\{a_n\} \in \Pi_1^0$.

Lemma 4.8
Sei X polnisch und überabzählbar und $A \subseteq X$ und $A \neq \emptyset$ dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1) Es gibt ein $B \in \mathcal{B}(X)$ und ein stetiges $f : B \to X$ mit $f(B) = A$ (daher $A \in \Sigma_1^1$)

2) Es gibt ein polnischen Raum Y und ein stetiges $f : Y \to X$ mit $f(Y) = A$

3) Es gibt ein stetiges $f : \mathcal{N} \to X$ mit $f(\mathcal{N}) = A$

4) Es gibt eine abgeschlossene Teilmenge $F \subseteq \mathcal{N} \times X$ mit $\mathrm{pr}_2(F) = A$

5) Es gibt eine Borel-Menge $F \subseteq \mathcal{N} \times X$ mit $\mathrm{pr}_2(F) = A$

Beweis: 1) $\implies$ 2) Sei $f : B \to X$ stetig mit $f(B) = A$. Man erweitert die Topologie von B zu einer τ', dann ist (B, τ') polnisch und $f : (B, \tau') \to X$ bleibt stetig und $f(B) = A$ bleibt erhalten.

2) $\implies$ 1) Sei Y polnisch und $f : Y \to X$ stetig mit $f(Y) = A$. Sei h ein Homöomorphismus zwischen $\mathcal{N}$ und $\theta \subseteq X$.(nach Alexandroff/Hausdorff). Sei g surjektiv und stetig von $\mathcal{N}$ auf Y. (Suslin-Luzin) Da θ und $\mathcal{N}$ homöomorph sind und $\mathcal{N}$ polnisch ist, ist auch θ polnisch. Aber $\theta \subseteq X$ und somit muss $\theta \in \Pi^0_2(X) \subseteq \mathcal{B}(X)$ liegen. Dann ist $f \circ g \circ h^{-1} : \theta \to X$ stetig und da h^{-1} und g surjektiv sind, gilt $g(h^{-1}(\theta)) = Y$ und $(f \circ g \circ h^{-1})(\theta) = A$.

2) $\implies$ 3) Sei Y polnisch und $f : Y \to X$ stetig mit $f(Y) = A$. Es gibt ein surjektives $g : \mathcal{N} \to Y$.(Suslin-Luzin) Dann ist $f \circ g$ die gesuchte Funktion.

3) $\implies$ 4) Sei $f : \mathcal{N} \to X$ stetig mit $f(X) = A$. Man betrachte den Graph F von f mit $F = \{(x, f(x)) : x \in \mathcal{N}\} \subseteq \mathcal{N} \times X$. Dann ist $\mathrm{pr}_2(F) = f(\mathcal{N}) = A$. Und der Graph einer stetigen Funktion ist stets abgeschlossen in $\mathcal{N} \to X$.

4) $\implies$ 5) Trivial, denn jede abgeschlossene Menge ist auch Borelmenge.

5) $\implies$ 2) Sei F eine Borelmenge von $\mathcal{N} \times X$. Sei τ eine Erweiterung der Topologie von F, sodass (F, τ) Polnisch wird. Dann ist $\mathrm{pr}_2 : (F, \tau) \subseteq \mathcal{N} \times X \to X$ stetig und $\mathrm{pr}_2(F) = A$ □

Bemerkung (1) Sei (X, τ) polnisch und $\theta \subseteq X$. Die Borelmengen des topologischen Raumes $(\theta, \tau|_\theta)$ sind genau die Mengen der Form $\theta \cap A$ wo $A \in \mathcal{B}((X, \tau))$. Durch Induktion auf α erhält/beweist man dass für jedes $\alpha \in \aleph_1$ auch $\Sigma^0_\alpha((\theta, \tau|_\theta)) = \{\theta \cap A : A \in \Sigma^0_\alpha(X)\}$

(2) Entsprechend, wenn $\theta \in \mathcal{B}(X)$ dann ist $\mathcal{B}(\theta) = \mathcal{B}(X) \cap \wp(\theta)$. Das folgt aus (1) und daraus das der Schnitt zweier Borelmengen wieder Borel ist.

(3) Seien X, Y polnische Räume und $A \in \mathcal{B}(X)$, dann ist $A \times Y \in \mathcal{B}(X \times Y)$. Dies folgt durch Induktion auf $\alpha \in \aleph_1$ mit $A \in \Sigma^0_\alpha(X)$, dann ist auch $A \times Y \in \Sigma^0_\alpha(X \times Y)$.

(4) Sei $\theta \in \mathcal{B}(X)$. Dann ist $\Sigma^1_1(\theta) = \Sigma^1_1(X) \cap \wp(\theta)$. Das folgt aus (2) und (3) zusammen mit 5) aus dem vorhergehenden Lemma.

(5) Seien $A, B \in \Sigma^1_1(X)$, dann ist auch $A \cap B$ in $\Sigma^1_1(X)$. Für $A \cap B = \emptyset$ ist dies klar, denn $\mathcal{B}(X) \subseteq \Sigma^1_1(X)$ (mittels $f = \mathrm{id}_X$).

Nun seien $f : \mathcal{N} \to X$ und $g : \mathcal{N} \to X$ stetig mit $f(\mathcal{N}) = A$ und $g(\mathcal{N}) = B$. Und sei $h : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to X \times X$ mit $(a, b) \mapsto (f(a), g(b))$. Sei $\delta = \{(a, a) : a \in X\}$. δ ist abgeschlossen in $X \times X$ dann ist $Y := h^{-1}(\delta)$ abgeschlossen in $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$, folglich $Y \in \Pi^0_2$ und somit ist Y polnisch. Sei $\varphi : Y \to X$ mit $\varphi = \mathrm{pr}_2 \circ h|_Y$.

Es gilt $A \cap B = \varphi(Y)$ und somit $A \cap B \in \Sigma^1_1(X)$.

4.4 $\mathcal{N}$-Universale Mengen

Definition Sei X polnisch. $U \subseteq \mathcal{N} \times X$ sei Γ eine Klasse von Teilmengen von polnischen Räumen.

Sei $\Gamma(X)$ die Menge von Teilmengen von X die in Γ sind.

Eine Menge $U \subseteq \mathcal{N} \times X$ ist **$\mathcal{N}$-Universal für** $\Gamma(X)$ genau dann wenn $U \in \Gamma(\mathcal{N} \times X)$ und $\Gamma(X) = \{U_a : a \in \mathcal{N}\}$. Dabei ist $U_a := \{y \in X : (a, y) \in U\}$.

Beispiel Beispiele für mögliche Γ: Σ^0_α, Π^0_α, $\mathcal{B}$, Σ^1_1 ect.

Bemerkung Ist U eine $\mathcal{N}$-Universal für $\Sigma^0_\alpha(\mathcal{N})$, so ist $\complement_{\mathcal{N}\times\mathcal{N}} U$ ein $\mathcal{N}$-Universal für $\Pi^0_\alpha(\mathcal{N})$ denn

$$y \in \left(\complement_{\mathcal{N}\times\mathcal{N}} U\right)_x \iff (x, y) \in \complement_{\mathcal{N}\times\mathcal{N}} U \iff (x, y) \notin U \iff y \notin U_x \iff y \in \complement_{\mathcal{N}} U_x$$

Lemma 4.9
Es gibt ein $\mathcal{N}$-Universal für $\Sigma^0_1(\mathcal{N})$

> **Beweis:** Sei $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Basis von $\mathcal{N}$ und sei U_b für $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{N}$ definiert durch $U_b := \bigcup_{i\in\{j:b_j=0\}} O_i$ und somit ist
>
> $$U = \left\{ (b, x) : b \in \mathcal{N}, x \in U_b = \bigcup_{i\in\{j:b_j=0\}} O_i \right\}$$
>
> Es ist klar, dass die $(U_b)_{b\in\mathcal{N}}$ genau die offene Mengen von $\mathcal{N}$ sind.
>
> Zu Zeigen bleibt dass U offen in $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ daher $U \in \Sigma^0_1(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$.
>
> Sei $((b_i)_{i\in\mathcal{N}}, x) \in U$. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ sodass $b_m = 0$ und $x \in O_m$. Sei $O = N_{b|_{m+1}} \times O_m$ dann ist $O \subseteq U$ und O ist offen in $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$. Damit ist aber U offen in $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$. □

Theorem 4.10
Es gibt ein U welches $\mathcal{N}$-Universal für $\Sigma^1_1(\mathcal{N})$

> **Beweis:** A ist $\mathcal{N}$ Universal zu $\Sigma^1_1(\mathcal{N})$ genau dann, wenn $\Sigma^1_1(\mathcal{N}) = \{A_b : b \in \mathcal{N}\}$ und $A \in \Sigma^1_1(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$. Sei nun U ein $\mathcal{N}$-Universal für $\Sigma^0_1(\mathcal{N})$. Dann $\complement_{\mathcal{N}\times\mathcal{N}} U$ ist $\mathcal{N}$-Universal für $\Pi^0_1(\mathcal{N})$. Da $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ homöomorph zu $\mathcal{N}$ ist, gibt es auch ein $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{N} \times (\mathcal{N} \times \mathcal{N})$, sodass $\mathcal{F}$ ist $\mathcal{N}$-Universal für $\Pi^0_1(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$. Daher die abgeschlossenen Mengen von $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ sind genau die $\mathcal{F}_b$, $b \in \mathcal{N}$ und $\mathcal{F}$ ist abgeschlossen in $\mathcal{N} \times (\mathcal{N} \times \mathcal{N})$. Man definiert $A \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ wie folgt. Für $b \in \mathcal{N}$ sei
>
> $$A_b = \mathrm{pr}_1 \mathcal{F}_b = \{x : \text{ Es gibt ein } y \in \mathcal{N} \text{ sodass } (x, y) \in \mathcal{F}_b\}$$
>
> daher
>
> $$A = \{(b, x) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} : \text{ Es gibt ein } y \in \mathcal{N} \text{ sodass } (b, x, y) \in \mathcal{F}\} = \mathrm{pr}_{12}(\mathcal{F})$$

pr_1 und pr_{12} sind stetig, $\mathcal{F}$ und die $\mathcal{F}_b$ sind abgeschlossen in $\mathcal{N} \times (\mathcal{N} \times \mathcal{N})$ und $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$. Dann ist $A \in \Sigma_1^1(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$ und die $A_b \in \Sigma_1^1(\mathcal{N})$.

Es bleibt zu zeigen dass alle $B \in \Sigma_1^1(\mathcal{N})$ von der Form A_b für $b \in \mathcal{N}$ sind. Sei $B \in \Sigma_1^1(\mathcal{N})$, so sei $\mathcal{F} \in \Pi_1^0(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$ sodass $\mathrm{pr}_1(\mathcal{F}) = B$. $\mathcal{F}$ ist $\mathcal{N}$-universal für $\Pi_1^0(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$. Dann gibt es ein $b \in \mathcal{N}$ sodass $F = \mathcal{F}_b$ und es gilt

$$B = \mathrm{pr}_1(F) = \mathrm{pr}_1(\mathcal{F}_b) = A_b$$

Dann ist B von der Form A_b mit $b \in \mathcal{N}$. A ist $\mathcal{N}$-Universal für $\Sigma_1^1(\mathcal{N})$ □

Theorem 4.11
Es gibt für jedes $\alpha \in \aleph_1$ ein $U \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ das $\mathcal{N}$-universal ist für $\Sigma_\alpha^0(\mathcal{N})$.

Beweis: Sei $\alpha \in \aleph_1$. Wir zeigen mittels Induktion, dass es dann ein $U \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ gibt, sodass U ein $\mathcal{N}$-universal für $\Sigma_\alpha^0(\mathcal{N})$ ist.

Für $\alpha = 1$ haben wir dies bereits im Beweis von 4.9 gezeigt.

Sei nun $\alpha \in \aleph_1$, sodass für alle $\beta < \alpha$ die Aussage bereits gezeigt ist.

Ist α eine Limeszahl, so seien $\alpha_i < \alpha_{i+1} < \alpha$, sodass $\alpha = \lim_{i \to \omega} \alpha_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i$, andernfalls ist $\alpha = \beta + 1$ für ein β und dann sei $\alpha_i = \beta$.

Es gibt nach Voraussetzung $\mathcal{N}$-Universale F^{α_i} für die $\Pi_{\alpha_i}^0(\mathcal{N})$. Sei $s : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion. Man definiert für jedes $y \in \mathcal{N}$ ein $y^n := (y_{s(n,i)})_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{N}$. Sei nun U^α definiert durch $U_y^\alpha := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_{y^n}^{\alpha_n}$. Daher

$$U^\alpha = \{(y, x) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N},\ \text{sodass } (y^n, x) \in F^{\alpha_n}\} \qquad \text{und} \qquad F^\alpha := \complement_{\mathcal{N} \times \mathcal{N}} U^\alpha$$

Sei $A \in \Sigma_\alpha^0(\mathcal{N})$. Dann gibt es $a_i \in \Pi_{\alpha_i}^0(\mathcal{N})$ mit $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} a_i$ (die a_i können auch Leer sein.) und gemäß der Konstruktion gibt es dann ein $y \in \mathcal{N}$, sodass $A = U_y^\alpha$.

Es bleibt also zu zeigen, dass $U^\alpha \in \Sigma_\alpha^0(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$. Man betrachte die Funktionen $f_n : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ mit $(y, x) \mapsto (y^n, x)$. f_n ist stetig, denn sei y^n beliebig, $N_{y^n|_m}$ eine beliebige Umgebung um y^n und O offen, dann gibt es ein festes, minimales m' sodass alle m stellen von y^n in y vorkommen. Dann aber ist

$$f_n{}^{-1}(N_{y^n|_m} \times O) = \left(\bigcup_{\substack{x \in \mathcal{N} \\ x^n|_m = y^n|_m}} N_{x|_{m'}} \right) \times O \text{ offen.}$$

Nun sind aber die F^{α_n} in $\Pi_{\alpha_n}^0(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$ und somit auch

$$U^\alpha = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overbrace{(f^n)^{-1}(F^{\alpha_n})}^{\in \Pi_{\alpha_n}^0(\mathcal{N} \times \mathcal{N})} \in \Sigma_\alpha^0(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$$

□

4.5 Suslin's Theorem

Theorem 4.12 (Suslin)
Sei X polnisch überabzählbar. Dann gibt es ein A sodass $A \in \Sigma_1^1(X)$ aber $A \notin \mathcal{B}(X)$

Beweis: $X = \mathcal{N} \times \mathcal{N}$

U sei ein $\mathcal{N}$-Universal für $\Sigma_1^1(\mathcal{N})$. Dann ist $U \in \Sigma_1^1(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$.

Behauptung : $U \notin \mathcal{B}(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$ sonst wäre auch $\complement_{\mathcal{N}\times\mathcal{N}} U$ Borelmenge. Man betrachte die Abbildung $h : \mathcal{N} \to \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ mit $x \mapsto (x, x)$ diese ist stetig. Dann ist $h^{-1}\left(\complement_{\mathcal{N}\times\mathcal{N}} U\right) =: V$ ist dann Borelmenge in $\mathcal{N}$. Da U ein $\mathcal{N}$-Universal für $\Sigma_1^1(\mathcal{N})$ ist und $\mathcal{B}(\mathcal{N}) \subseteq \Sigma_1^1(\mathcal{N})$ gibt es auch ein $a \in \mathcal{N}$, sodass $U_a = \{x \in \mathcal{N} : (a, x) \in U\} = V$. Es gilt aber

$$V = h^{-1}(\complement_{\mathcal{N}\times\mathcal{N}} U) = \{x \in \mathcal{N} : (x, x) \notin U\} = \{x \in \mathcal{N} : x \notin U_x\}$$

Dann aber wäre $a \in U_a$ genau dann, wenn $a \notin U_a$. Ψ

$X = \mathcal{N}$**:**

Für $X = \mathcal{N}$ folgt, die Aussage, da $\mathcal{N}$ und $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ homöomorph sind.

X **beliebig überabzählbar.** Dann gibt es ein $\theta \subseteq X$ dass homöomorph zu $\mathcal{N}$. Damit gibt es im Topologischen Raum von θ ein $Y \in \Sigma_1^1(\theta)$ was nicht Borel ist, daher $Y \notin \mathcal{B}(\theta)$. Da θ polnisch ist und somit $\theta \in \Pi_2^0(X) \subseteq \mathcal{B}(X)$ folgt nach der Bemerkung (2), dass die Borel-Mengen von θ genau die Borelmengen von X sind, die Teilmengen von θ sind. Nach der Bemerkung (4) folgt dann auch, dass die $\Sigma_1^1(\theta)$ Mengen genau die $\Sigma_1^1(X)$ Mengen sind, die Teilmengen von θ sind.

Damit folgt aber $Y \in \Sigma_1^1(X)$ und $Y \notin \mathcal{B}(X)$. $\square$

Theorem 4.13
Sei X polnisch, überabzählbar, dann gilt für $\alpha < \beta \in \aleph_1$

$$\Sigma_\alpha^0(X) \subsetneq \Sigma_\beta^0(X)$$

Beweis: $X = \mathcal{N}$

Angenommen $\Sigma_\alpha^0(\mathcal{N}) \subsetneq \Sigma_\beta^0(\mathcal{N})$ würde nicht für alle $\alpha < \beta$ gelten, dann gibt es $\alpha < \beta$ mit $\Sigma_\alpha^0(\mathcal{N}) = \Sigma_\beta^0(\mathcal{N})$ und da $\Sigma_\alpha^0(\mathcal{N}) \subseteq \Sigma_{\alpha+1}^0(\mathcal{N}) \subseteq \Sigma_\beta^0(\mathcal{N})$ folgt dann auch $\Sigma_\alpha^0(\mathcal{N}) = \Sigma_{\alpha+1}^0(\mathcal{N})$. Sei $U \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ ein $\mathcal{N}$-Universal für $\Sigma_\alpha^0(\mathcal{N})$ gemäß Theorem 4.12. Sei $h : \mathcal{N} \to \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ mit $x \mapsto (x, x)$. Dann ist h stetig. Da $U \in \Sigma_\alpha^0(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$ ist, ist $h^{-1}(U) \in \Sigma_\alpha^0(\mathcal{N})$ und $h^{-1}(\complement_{\mathcal{N}\times\mathcal{N}} U) \in \Pi_\alpha^0(\mathcal{N}) = \Sigma_\alpha^0(\mathcal{N})$.

Es gilt aber $h^{-1}(\complement_{\mathcal{N}\times\mathcal{N}} U) = \{x \in \mathcal{N} : (x, x) \notin U\} \in \Sigma_\alpha^0(\mathcal{N})$ und und U ist $\mathcal{N}$-Universal, daher gibt es ein $b \in \mathcal{N}$ sodass $U_b = h^{-1}(\complement_{\mathcal{N}\times\mathcal{N}} U)$. Dann aber ist $b \in U_b$ genau dann wenn $b \notin U_b$. Ψ

X überabzählbar Sei X ein überabzählbarer polnischer Raum. Dann gibt es ein Homöomorphismus $h : \mathcal{N} \to X$ zwischen $\mathcal{N}$ und $h(\mathcal{N}) =: \theta$. Dann ist $\theta \in \Pi^0_2(X) \subseteq \mathcal{B}(X)$. Dann gilt für alle $\beta \in \aleph_1$ dass $\Sigma^0_\beta(\theta) = \{A \cap \theta : A \in \Sigma^0_\beta(X)\}$ und $\Pi^0_\beta(\theta) = \{A \cap \theta : A \in \Pi^0_\beta(X)\}$.

Da aber θ und $\mathcal{N}$ homöomorph sind, gibt es zu jedem $\beta > 2$ ein $B \in \Sigma^0_\beta(\theta) \setminus \Pi^0_\beta(\theta)$. Dann gibt es auch ein $B \in \Sigma^0_\beta(X) \setminus \Pi^0_\beta(X)$. damit gilt für alle $\beta > \alpha \geq 2$ dass $\Sigma^0_\alpha(X) \subsetneq \Sigma^0_\beta(X)$. Für $a < 2$ muss die Aussage dann auch gelten, weil sonst $\Sigma^0_\alpha(X) = \Sigma^0_\beta(X)$ für alle β wäre. □

4.6 Luzin's Trennbarkeit Theorem

Definition Sei X polnisch, $A, B \subseteq X$. Man sagt A und B sind **Borel-trennbar** genau dann wenn es ein Borel $U \in \mathcal{B}(X)$ gibt sodass $A \subseteq U$ und $B \cap U = \emptyset$ (bzw. $B \subseteq \complement_X U$).

Lemma 4.14
Sei X ein Polnischer Raum und seien die $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sodass für alle Paare i, j die A_i und B_j Borel-trennbar sind. Dann sind auch $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ und $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j$ Borel-trennbar.

Beweis: Nach Voraussetzung gibt es für jedes $i, j \in \mathbb{N}$ eine Borel-Menge $X_{i,j} \in \mathcal{B}(X)$ sodass $A_i \subseteq X_{i,j}$ und $B_j \subseteq \complement_X X_{i,j}$ Sei

$$\theta := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bigcap_{j\in\mathbb{N}} X_{i,j}$$

$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \subseteq \theta$

Denn sei $i \in \mathbb{N}$ fest, dann gilt für jedes j, dass $A_i \subseteq X_{i,j}$ und damit ist $A_i \subseteq \bigcap_{j\in\mathbb{N}} X_{i,j}$. Dann aber ist auch $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bigcap_{j\in\mathbb{N}} X_{i,j} = \theta$.

$\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j \subseteq \complement_X \theta$

Dies folgt aus Symmetrie, denn Allgemein gilt $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \bigcap_{\kappa\in\mathcal{K}} A_{\lambda,\kappa} \subseteq \bigcap_{\kappa\in\mathcal{K}} \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_{\lambda,\kappa}$ und somit

$$\bigcup_{j\in\mathcal{N}} B_j \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \complement_X X_{i,j} \subseteq \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \complement_X X_{i,j} = \complement_X \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bigcap_{j\in\mathbb{N}} X_{i,j} \right) = \complement_X \theta$$

θ ist Borel Da die $X_{i,j}$ Borel-Mengen sind, gibt es $\alpha_{i,j} \in \aleph_1$ sodass $X_{i,j} \in \Pi^0_{\alpha_{i,j}}(X)$. Sei $\alpha := \sup_{i,j\in\mathbb{N}} \alpha_{i,j} = \bigcup_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \alpha_{i,j}$. Dann ist α abzählbare Vereinigung abzählbarer Ordinalzahlen und somit abzählbar und in $\aleph_1$. Es gilt für alle $i, j \in \mathbb{N}$, dass $X_{i,j} \in \Pi^0_\alpha(X)$ und folglich auch für alle $i \in \mathbb{N}$ dass $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} X_{i,j} \in \Pi^0_\alpha(X)$. Somit ist

$$\theta = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bigcap_{j\in\mathbb{N}} X_{i,j} \in \Sigma^0_{\alpha+1}(X) \subseteq \mathcal{B}(X)$$

□

Theorem 4.15 (Luzin's Separation theorem)
Sei X ein polnischer Raum und $A, B \subseteq X$. Wenn $A \cap B = \emptyset$ und $A, B \in \Sigma^1_1(X)$ dann existiert ein $U \in \mathcal{B}(X)$, sodass $A \subseteq U$ und $U \cap B = \emptyset$.
kurz: Sind $A, B \in \Sigma^1_1(X)$ disjunkt, dann sind sie Borel-trennbar.

Beweis: Seien $A, B \in \Sigma^1_1(X)$ mit $A \cap B = \emptyset$. Seien $f, g : \mathcal{N} \to X$ stetige Funktionen mit $f(\mathcal{N}) = A$ und $g(\mathcal{N}) = B$. Für eine endliche Folge $s \in \mathbb{N}^{<\aleph_0}$ definiert man $A_s := f(N_s)$ und $B_s := g(N_s)$. Es gelten dann $A_\emptyset = A, B_\emptyset = B$ und da $N_s = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} N_{s\wedge i}$ folgt auch

$$A_s = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_{s\wedge i} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f(N_{s\wedge i}) \quad \text{und analog} \quad B_s = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_{s\wedge i} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} g(N_{s\wedge i}).$$

Angenommen nun A und B seien nicht Borel-trennbar. Dann muss es nach dem vorangegangenen Lemma auch $a_0, b_0 \in \mathbb{N}$ geben, sodass A_{a_0} und B_{b_0} nicht Borel-trennbar sind. Durch Induktion definiert man dann Folgen $a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $b = (b_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{N}$ sodass für alle n die $A_{a|_n}$ und $B_{b|_n}$ nicht Borel-trennbar sind.

Es gilt $f(a) \in f(\mathcal{N}) = A$ und $g(b) \in g(\mathcal{N}) = B$ und da $A \cap B = \emptyset$ gilt auch $f(a) \neq g(b)$. Da X Hausdorff gibt es trennende offene Umgebungen $U, V \subseteq X$ mit $U \cap V = \emptyset$ und $f(a) \in U$ und $g(b) \in V$. Da $f(a) \in U$, U offen sowie f stetig und die $N_{a|_n}$ eine Basis der Umgebungen von a sind, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f(N_{a|_n}) = A_{a|_n} \subseteq U$. Analog gibt es auch ein $n' \in \mathbb{N}$ sodass $B_{b|_{n'}} \subseteq V$. Sei oBdA $n = n'$, andernfalls da für größere $m > n$ bzw. $m' > n'$ auch $A_{a|_m} \subseteq A_{a|_n}$ bzw. $B_{a|_{m'}} \subseteq B_{a|_{n'}}$ wähle man das kleinere der beiden einfach größer sodass $n = n'$ gilt.

Dann aber ist $B_{b|_n} \subseteq V \subseteq \complement_X U$ und $A_{a|_n} \subseteq U$ und U ist offen bzw. Borel und folglich sind $A_{a|_n}$ und $B_{b|_n}$ auch Borel-trennbar. Dies steht im Widerspruch zur Annahme. □

Theorem 4.16
Sei X polnisch. Dann $\Sigma^1_1(X) \cap \Pi^1_1(X) = \mathcal{B}(X)$

Beweis: Wir wissen dass $\mathcal{B}(X) \subseteq \Sigma^1_1(X) \cap \Pi^1_1(X)$ gilt, denn wenn $A \in \mathcal{B}(X)$ ist, so ist $\mathrm{id}_X : X \to X$ stetig und $\mathrm{id}_X(A) = A \in \Sigma^1_1(X)$ und zudem ist $\complement_X A \in \mathcal{B}(X)$ und somit in $\Sigma^1_1(X)$ und folglich $A \in \Pi^1_1(X)$.

Andererseits, sei $A \in \Sigma^1_1(X) \cap \Pi^1_1(X)$ dann ist auch $\complement_X A \in \Sigma^1_1(X)$ und $A \cap \complement_X A = \emptyset$. Nach dem vorherigem Theorem sind dann A und $\complement_X A$ auch Borel-trennbar durch ein $B \in \mathcal{B}(X)$ und folglich gilt also $A \subseteq B$ und $\complement_X A \subseteq \complement_X B$ und somit ist $A = B$ und A bereits Borel-Menge. □

5 Polnische Gruppen

5.1 Allgemeines zu Polnischen Gruppen

Definition Eine **topologische Gruppe** ist eine Gruppe $(G, \odot)$ mit einer Topologie, für die die Abbildungen $\odot : X \times X \to X$ mit $(x, y) \mapsto x \odot y$ und $\cdot^{-1} : X \to X$ mit $x \mapsto x^{-1}$ stetig sind.

Eine **polnische Gruppe** ist eine topologische Gruppe, deren Topologie polnisch ist.

Beispiel

- $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R}^n, +)$, $(\mathbb{C}^n, +)$ sind polnische Gruppen
- $(S_\infty, \circ) \subseteq \mathcal{N}$ ist eine polnische Gruppe. Wir haben bereits gezeigt, dass S_∞ ein polnischer Raum ist, da $S_\infty \in \Pi^0_2(\mathcal{N})$. Es wäre noch zu zeigen, dass $\cdot^{-1}$ und $\circ$ stetig sind.

Bemerkung Sei $(G, \odot)$ eine topologische Gruppe $h \in G$ dann sind $f_h : G \to G$ mit $x \mapsto x \odot h$ und $g_h : G \to G$ mit $x \mapsto h \odot x$ sowie $\circ^{-1}$ Homöomorphismen des Raumes G.

Übung Wenn für $i \in \mathbb{N}$ die G_i polnische Gruppen sind, so ist $\prod_{i \in \mathbb{N}} G_i$ auch eine Polnische Gruppe.

Beispiel Um das folgende Theorem zu motivieren, folgt erst einmal ein Beispiel:
Sei $X = S_\infty$. Wir definieren nun eine neue Metrik d auf S_∞.
Für $x = (x_i), y = (y_i) \in S_\infty$ sei $n_{x,y}$ dass kleinste i, sodass $x_i \neq y_i$ und dann sei

$$d : S_\infty \times S_\infty \to [0, \infty) \text{ mit } d(x, y) := \begin{cases} 2^{-n_{x,y}}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}.$$

Dann induziert d die Topologie von S_∞, denn für $2^{-n} < \varepsilon \leq 2^{-n+1}$ sind die Baselemente $B(x, \varepsilon) = N_{x|_n} \cap S_\infty$. (S_∞, d) ist aber nicht vollständig, denn sei s_n die Permutation $s_n := (0, 1 \ldots, n-2, n-1) = (1, 2, \ldots n-2, n-1, 0, n, n+1, n+2 \ldots)$, dann ist (s_n) eine Cauchy-Folge von (S_∞, d). Aber $s = \lim_{n \to \infty} s_n \in \mathcal{N}$ ist nicht surjektiv, denn 0 liegt nicht im Bilde.

Allgemeiner gilt

$$\Big\{ s \in \mathcal{N} : \text{ sodass eine Cauchy-Folge } (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq S_\infty \text{ mit } s = \lim_{n \to \infty} s_n \text{ gibt} \Big\} = \{ s \in \mathcal{N} : s \text{ ist injektiv } \}$$

bzw. gilt in $\mathcal{N}$:

$$\overline{S_\infty} = \{ s \in \mathcal{N} : s \text{ ist injektiv } \}$$

d ist **linksinvariant** auf $(S_\infty, \circ)$ daher für alle Tripel $a, b, x \in S_\infty$ ist auch

$$d(a, b) = d(x \odot a, x \odot b).$$

Denn da x bijektiv ist, folgt $a(n) = b(n) \iff x(a(n)) = x(b(n))$. d ist aber nicht **rechtsinvariant** (zB. $a = (0,1), b = (0,2), x = (2,3)$ mit $n = 3$).

S_∞ besitzt eine Metrik die linksinvariant ist und nicht vollständig ist, dann besitzt S_∞ keine Metrik die linksinvariant und gleichzeitig vollständig ist. (Dies ist ein Theorem, was aber in dieser Vorlesung nicht mehr bewiesen wird.)

Sei $d' : S_\infty \times S_\infty \to [0, \infty)$ mit $(a, b) \mapsto d(a, b) + d(a^{-1}, b^{-1})$ dann ist d' vollständig und induziert die selbe Topologie auf S_∞. Aber da d' ist weder rechts noch linksinvariant, da d nicht rechtinvariant war.

Theorem 5.1
Sei $(G, \odot)$ eine polnische Gruppe und $(H, \odot)$ eine Untergruppe von G. Dann ist H genau dann polnisch, wenn H abgeschlossen in G ist.

Beweis: $\Longleftarrow$ trivial, denn wenn H abgeschlossen in G ist, so auch $H \in \Pi_2^0(G)$ und somit ist H polnisch.

$\Longrightarrow$ Angenommen H ist polnisch, es ist zu zeigen, dass $H = \overline{H}$.

$\overline{H}$ ist eine Gruppe, denn G ist polnisch und somit ist für $x_n, y_n \in \overline{H}$ mit $(x_n, y_n) \to (x, y) \in G^2 (\in \overline{H})$ auch $(x_n \odot y_n) \to x \odot y \in \overline{H}$ und gleichfalls ist $x_n^{-1} \to x^{-1} \in \overline{H}$.

Zudem ist $\overline{H}$ auch polnisch, denn es ist abgeschlossen und somit in $\Pi_2^0(X)$.

H ist ein polnischer Unterraum von $\overline{H}$ und somit $H \in \Pi_2^0(\overline{H})$. Es gibt also O_n offen in $\overline{H}$ sodass $H = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$. H ist dicht in $\overline{H}$ und dann sind auch die O_n wegen $H \subseteq O_n \subseteq \overline{H}$ dicht in $\overline{H}$.

Zeigen nun $\overline{H} \subseteq H$. Sei $g \in \overline{H}$. Dann ist $f_g : \overline{H} \to \overline{H}, x \mapsto g \odot x$ ein Homöomorphismus. Es gilt $f_g(H) = g \odot H$ und da f_g ein Homöomorphismus ist, gibt es O'_n offen und dicht in $\overline{H}$ mit $g \odot H = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O'_n$. Dann aber ist $H \cap (g \odot H) = \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n\right) \cap \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O'_n\right)$ ein abzählbarer Schnitt offener dichter Teilmengen und nach Baire gilt somit $H \cap (g \odot H) \neq \emptyset$.

Dann ist aber bereits $g \in H$, denn sei $x \in H \cap (g \odot H)$ dann ist $x \in H$ und gibt es ein $y \in H$ mit $x = g \odot y$. Da H eine Untergruppe ist, ist auch $x \odot y^{-1} = g \in H$. $\square$

5.2 σ-Ideale und magere Mengen

Definition Sei X eine Menge und $I \subset \wp(X)$. I ist ein **σ-Ideal** genau dann wenn die folgenden Eigenschaften gelten:

(1) $\emptyset \in I$ [1]

[1] Diese Eigenschaft habe ich ergänzt, mit dem Verweis, das der Begriff in der Literatur so geläufig scheint. Explizit verweise ich hierbei auf Seite 26 Ex. 2.48 des Skriptes „Descriptive Set Theory" von David Marker aus dem Jahre 2002, welches Herr Maalouf ausdrücklich als gute Referenz zu seiner Vorlesung auszeichnete.

(2) Sei $B \in I$ und $A \subseteq B$, dann ist auch $A \in I$

(3) $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq I$, dann ist $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in I$.

Bemerkung Der obige Begriff des σ-Ideals ist eine Verallgemeinerung des Ideals. Denn für eine beliebige Menge X ist $(\wp(X), \triangle, \cap)$ ein kommutativer Ring mit $1 = X$. Dieser Ring hat Ideale und diese I erfüllen dann die Eigenschaften

(i) $\emptyset \in I \qquad (0 \in I)$

(ii) $A \subseteq X$ und $B \in I$, folgt $A \cap B \in I \qquad (A \cdot B \in I)$

(iii) $A, B \in I$, dann ist auch $A\triangle B = A \setminus B \cup B \setminus A \in I \qquad (A - B \in I)$ [2]

Nun ist (i) nicht anderes als (1), (ii) ist nicht anderes (2) denn $A \subseteq B$ genau dann wenn es ein $A' \subseteq X$ gibt mit $A' \cap B = A$ und (3) stellt mit (2) ($A \setminus B \subseteq A$ und $B \setminus A \subseteq B$) auch (iii) sicher.

Daher jedes σ-Ideal ist auch ein Ideal in dem oberen Sinne.

Analog zu den Äquivalenzklassen $A+I$ eines Ideals, sagen wir $A = B$ Modulo I genau dann, wenn $A\triangle B \in I$. Wenn I klar ist, so schreiben wir hierfür $A =^* B$.

Beispiel Sei

$$I = \{B \subseteq \mathbb{R} : \text{ sodass es ein } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ gibt mit } \lambda(A) = 0 \text{ und } B \subseteq A\}$$

dann ist I ein σ-Ideal. (λ sei hier das Lebesgue Maß oder ein anderes Maß auf einer σ-Algebra die $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ enthält.)

Definition Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Wir sagen A **ist Mager** genau dann, wenn es eine Familie $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von abgeschlossene(, nigends dichten) Mengen mit $\mathring{F_i} = \emptyset$ von X gibt, sodass $A \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i$

Bemerkung

- Sei X polnisch und $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Familie von abgeschlossen Mengen mit $\mathring{F_i} = \emptyset$, dann ist ist auch $\mathring{\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i\right)} = \emptyset$ gemäß Baire.
- Eine magere Menge kann keine offene Menge enthalten.
- Eine abzählbare Vereinigung von mageren Mengen ist wieder Mager
- Wenn X polnisch ist, kann A nicht gleichzeitig Mager und co-mager sein.
- Der abzählbare Schnitt von co-mageren Mengen ist wieder co-mager.
- Wenn A co-mager ist, dann ist $A \neq \emptyset$ (Baire).

Die Menge der mageren Mengen von X ist ein σ-Ideal.

Definition Sei X polnisch und $A \subseteq X$. Wir sagen A ist **Baire messbar** genau dann, wenn es ein offenes U gibt, sodass $A =^* U$ daher $A\triangle U$ ist mager.

[2] Da $\emptyset = 0$ in dem Ring und $B\triangle B = \emptyset$, ist $B = -B$ und somit wird „$A - B = A + (-B)$“ zu $A\triangle B$

Beispiel • jede Offene Menge ist Baire messbar

- jede abgeschlossene Menge ist Baire messbar, denn $F \setminus \mathring{F}$ ist Mager und $F = \mathring{F} \cup F \setminus \mathring{F}$. Dann ist $F =^* \mathring{F}$

Lemma 5.2
1) Sei X ein topologischer Raum, dann ist $S = \{M \in \wp(X) : M \text{ Baire messbar } \}$ eine σ-Algebra.

2) Jede Borel-Menge ist Baire messbar.

Beweis: 2) folgt aus erstens denn die offenen Mengen sind Baire messbar und $\mathcal{B}(X)$ ist die kleinste σ-Algebra, die die offenen Mengen enthält und folglich $\mathcal{B}(X) \subseteq S$.

Beweisen nun 1):

Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Familie von Baire messbaren Mengen. Sei für jedes $i \in \mathbb{N}$ ein O_i offen so gewählt dass $A_i =^* O_i$ gilt, daher $A_i \triangle O_i$ ist mager. Dann aber ist $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i =^* \bigcup_{i\in\mathbb{N}} O_i$, denn es gilt Allgemein

$$\begin{aligned}
\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \triangle \bigcup_{i\in\mathbb{N}} O_i &= \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \setminus \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} O_i\right) \cup \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} O_i\right) \setminus \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \\
&\subseteq \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (A_i \setminus O_i)\right) \cup \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (O_i \setminus A_i)\right) \\
&= \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (A_i \triangle O_i)
\end{aligned}$$

Für das Komplement, sei $A =^* O$ für $A \subseteq X$ und O offen in X, dann $\complement_X A =^* \complement_X O$. Aber da $\complement_X O$ abgeschlossen ist, gibt es ein offenes U, sodass $\complement_X O =^* U$ und somit $\complement_X A =^* U$. □

Notation Sei X polnisch und O offen in X, $A \subseteq X$. Man sagt A **ist co-mager in** O genau dann, wenn $O \setminus A$ Mager ist.

Bemerkung • Wenn $O \neq \emptyset$ offen in X und $A, B \subseteq X$ sodass A und B co-mager in O sind, dann ist $A \cap B$ auch co-mager in O. Dies gilt, da abzählbare Vereinigung von mageren Mengen mager ist und $O \setminus (A \cap B) = O \setminus A \cup O \setminus B$.

- Wenn A Baire messbar ist. $A =^* O$ mit O offen. Dann ist A co-mager in O, denn ist $A \triangle O = A \setminus O \cup O \setminus A$ mager so auch $O \setminus A$

5.3 Baire messbare Homomorphismen

Cauchy hatte sich die Frage gestellt, welche Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additiv sind, daher $f(x + y) = f(x) + f(y)$ gilt für alle Paare von $x, y \in \mathbb{R}$.

Wenn f stetig ist, dann ist die Antwort, dass es ein $a \in \mathbb{R}$ geben muss, sodass $f(x) = ax$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Es gibt auch nicht stetige Beispiele, wie man mit dem Auswahlaxiom zeigen kann:

Sei $B \subseteq \mathbb{R}$ eine Basis für den $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$ mit $1 \in B$. (Hierfür braucht es das Auswahlaxiom.) Dann ist $\mathbb{R} = \bigoplus_{a \in B} a \cdot \mathbb{Q} = \mathbb{Q} \oplus \left(\bigoplus_{a \in B, a \neq 1} a \cdot \mathbb{Q} \right)$. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ die Projektion auf die erste Koordinate. Diese Abbildung ist nicht stetig, denn sonst wäre für jedes x auch $f(x) = f(1)x$, aber für $x \in \bigoplus_{a \in B, a \neq 1} a \cdot \mathbb{Q}$ ist $f(x) = 0$ und $f(1) = 1$.

Definition Seien X, Y polnische Räume. Wir sagen $f : X \to Y$ **ist Baire messbar** genau dann, wenn für jedes offene $V \subseteq Y$ auch $f^{-1}(V)$ Baire messbar in X ist.

Definition Sei G eine polnische Gruppe und $A \subseteq G$. Sei $(O_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Basis der Topologie von G. Sei

$$I_A = \{ i \in \mathbb{N} : \text{ sodass } A \text{ co-mager in } O_i \}.$$

Wir definieren $\mathcal{U}(A) := \bigcup_{i \in I_A} O_i$.

$\mathcal{U}(A)$ ist dann die größte offene Menge, in der A co-mager ist.

Bemerkung Sei $(G, \cdot)$ eine polnische Gruppe und $A \subseteq G$.
Mit A^{-1} notieren wir $\{a^{-1} \in G : a \in A\}$.

Es gilt dann $\mathcal{U}(A^{-1}) = (\mathcal{U}(A))^{-1}$ und für $g \in G$ auch $g \cdot \mathcal{U}(A) = \mathcal{U}(g \cdot A)$, da $f_g : G \to G, x \mapsto g \cdot x$ und $\cdot^{-1}$ Homöomorphismen sind.

Theorem 5.3 (Pettis)
Sei $(G, \cdot)$ eine polnische Gruppe und $A, B \subseteq G$, dann ist $\mathcal{U}(A) \cdot \mathcal{U}(B) \subseteq A \cdot B$ (Dabei ist $A \cdot B = \{x \cdot y : x \in A, y \in B\}$).

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} g \in A \cdot B &\iff \exists x \in A, y \in B : g = x \cdot y \iff \exists x \in A, y \in B : gy^{-1} = x \\ &\iff (g \cdot B^{-1}) \cap A \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Und Analog dazu

$$g \in \mathcal{U}(A) \cdot \mathcal{U}(B) \iff (g \cdot \mathcal{U}(B)^{-1}) \cap \mathcal{U}(A) \neq \emptyset \iff \mathcal{U}(g \cdot B^{-1}) \cap \mathcal{U}(A) \neq \emptyset.$$

Sei $g \in \mathcal{U}(A) \cdot \mathcal{U}(B)$. Nach der Definition von $\mathcal{U}(A)$ ist A co-mager in $\mathcal{U}(A)$ und somit auch co-mager in jeder Teilmenge von $\mathcal{U}(A)$. Dann ist aber A co-mager in $\mathcal{U}(g \cdot B^{-1}) \cap \mathcal{U}(A)$. Das Gleiche gilt dann auch für gB^{-1} und $\mathcal{U}(g \cdot B^{-1}) \cap \mathcal{U}(A) =: \theta$. θ ist eine nicht leere offene Menge. Außerdem folgt dass wenn A und gB^{-1} co-mager in θ sind, dass auch $gB^{-1} \cap A$ co-mager in θ ist und da θ offen und nicht leer ist, kann $gB^{-1} \cap A$ auch nicht leer sein. dann aber ist $g \in A \cdot B$.

Es folgt $\mathcal{U}(A) \cdot \mathcal{U}(B) \subseteq A \cdot B$. □

Korollar 5.4
Sei $(G,\cdot)$ eine polnische Gruppe und $A \subseteq G$, sodass A auch Baire messbar und nicht Mager. Dann ist $A \cdot A^{-1}$ eine Umgebung um 1.

Beweis: Sei O offen mit $A =^* O$. A ist nicht mager, so kann O auch nicht leer sein. Außerdem ist, da $O \triangle A$ mager ist, auch A mager in O und somit $O \subseteq \mathcal{U}(A)$. Dann aber ist $\mathcal{U}(A)$ nicht leer und es ist offen und das gleiche trifft dann auf $\mathcal{U}(A)^{-1}$ zu. Dann ist $\mathcal{U}(A) \cdot \mathcal{U}(A)^{-1}$ eine offene Umgebung um 1, denn $1 \in \mathcal{U}(A) \cdot \mathcal{U}(A)^{-1}$ und für $g \in G$ ist $g \cdot \mathcal{U}(A)^{-1}$ offen und somit $\mathcal{U}(A) \cdot \mathcal{U}(A)^{-1} = \bigcup_{g \in \mathcal{U}(A)} g \cdot \mathcal{U}(A)^{-1}$. Wegen Pettig ist $\mathcal{U}(A) \cdot \mathcal{U}(A)^{-1} \subseteq A \cdot A^{-1}$ und $A^{-1} \cdot A$ ist eine Umgebung von 1.
$\square$

Theorem 5.5
Seien G, H zwei polnische Gruppen und $f : G \to H$ ein Baire messbarer Homomorphismus. Dann ist f bereits stetig.

Beweis: Da für $x \in G$ und $V \subseteq H$ auch $xf^{-1}(V) = f^{-1}(f(x)V)$, reicht es zu zeigen, dass f in 1_G stetig ist.

Denn Angenommen f sei in 1_G stetig und V sei eine Umgebung von $f(x)$ für $x \in G$ beliebig. Dann ist $f(x)^{-1}V = f(x^{-1})V$ eine Umgebung um $1_H = f(1_G)$ und wegen Stetigkeit in 1_G ist $f^{-1}(f(x^{-1})V) = x^{-1}f^{-1}(V)$ eine Umgebung um 1_G. Dann aber ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung um x und somit f stetig in x.

Sei nun also $V \subseteq H$ eine Umgebung um $1_H = f(1_G)$. Zu zeigen ist dann, dass $f^{-1}(V)$ eine Umgebung um 1_G ist.

Sei nun W offen in H mit $W^{-1} \cdot W \subseteq V$.

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare dichte Familie von Elementen aus H. Dann ist $H = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(a_n \cdot W)$, denn sei $x \in H$, dann ist $x \cdot W^{-1}$ offen und da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dicht in H gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n \in x \cdot W^{-1}$. Dann aber ist $x \in a_n \cdot W$ und G ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(a_n \cdot W)$ und da f Baire messbar ist, sind auch alle $f^{-1}(a_n \cdot W)$ Baire messbar. Demzufolge gibt es aber ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $f^{-1}(a_{n_0} \cdot W)$ nicht mager ist, denn G ist als polnischer Raum nicht die abzählbare Vereinigung magerer Mengen.

Nach dem vorangegangen Korollar ist dann $(f^{-1}(a_{n_0} \cdot W))^{-1} \cdot f^{-1}(a_{n_0} \cdot W)$ eine Umgebung um 1_G.

Es gilt aber $(f^{-1}(a_{n_0} \cdot W))^{-1} \cdot f^{-1}(a_{n_0} \cdot W) \subseteq f^{-1}(W^{-1}W)$. $(*)$

Denn sei $x \in (f^{-1}(a_{n_0} \cdot W))^{-1} \cdot f^{-1}(a_{n_0} \cdot W)$.
Dann gibt es $u \in (f^{-1}(a_{n_0} \cdot W))^{-1}$ und $v \in f^{-1}(a_{n_0} \cdot W)$ mit $x = u \cdot v$. Aber dann gibt es $w, w' \in W$ mit $f(v) = a_{n_0} \cdot w'$ und

$$f(u)^{-1} = f(u^{-1}) = a_{n_0} \cdot w = (w^{-1} \cdot a_{n_0}^{-1})^{-1}.$$

Zusammenfassend ist dann $f(x) = f(u)f(v) = w^{-1}a_{n_0}^{-1}a_{n_0}w' = w^{-1}w'$ und somit $x \in f^{-1}(W^{-1}W)$.

Somit gilt

$$(f^{-1}(a_{n_0} \cdot W))^{-1} \cdot f^{-1}(a_{n_0} \cdot W) \overset{*}{\subseteq} f^{-1}(W^{-1}W) \subseteq f^{-1}(V)$$

Dann aber ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung um 1_G und f stetig in 1_G und somit stetig.
$\square$

Index